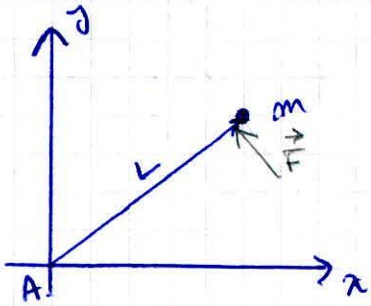
Dinámica del Cuerpo Rígido

En todos los casos adoptar $|g| = 10\,m/seg^2$

1) Un punto material de masa $m = 100\,gr$ está unido a un eje por una varilla de masa despreciable de 100 cm de longitud en forma similar a la mostrada en la figura. El punto material parte del reposo y solo puede girar alrededor del punto A, realizando dicho movimiento en el plano del papel. Si se aplica sobre el mismo en dirección perpendicular a la varilla una fuerza de módulo 1N.



¿Cuánto tardará dicha masa en alcanzar la frecuencia de 5 rps?

$m = 0,1\,kg$ $\quad \omega = 2\pi F = \frac{10\pi}{seg}$ $\quad v_{t0} = 0\,m/seg$

$R = 1m$

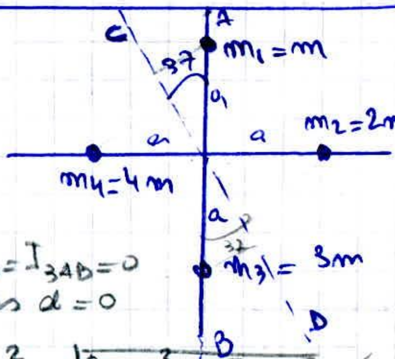
$f = 5\,rps = 300\,rpm$ $\quad v_t = \omega R = \frac{10\pi\, 1m}{seg} = \boxed{10\pi\,m/seg = v_t}$

$\Sigma F_{ext} = m.a \rightarrow 1N = 0,1\,kg\,.a \rightarrow \boxed{a = 10\,m/seg^2}$

$at = \Delta v \rightarrow t = \frac{v_F - \overset{0}{v_0}}{a} = \frac{10\pi\,m/seg}{10\,m/seg^2} = \pi\,seg \rightarrow \boxed{t = 3,14\,seg}$

---

2) Dado el sistema de masas puntuales de la figura unido por varillas rígidas de longitud 2a y de masas despreciables:



a) encuentre el momento de inercia con respecto al eje AB y el radio de giro

$I_{1AB} = I_{3AB} = 0$ pues $d = 0$

$I_{AB} = \underbrace{I_{1AB}}_{0} + I_{2AB} + \underbrace{I_{3AB}}_{0} + I_{4AB} =$

$= m_2 . d_2^2 + m_4 d_4^2 = 2m.a^2 + 4ma^2 = \boxed{6ma^2 = I_{AB}}$

$I_{AB} = (\Sigma m)\rho^2 \Rightarrow (m + 2m + 3m + 4m)\rho^2 = 10m\rho^2$ $\quad 6\cancel{m}a^2 = 10\cancel{m}\rho^2 \rightarrow \boxed{\rho = 0,775a}$

b) repetir el punto anterior con respecto al eje CD

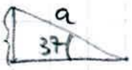
C.A

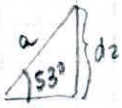
$I_{CD} = I_{1CD} + I_{2CD} + I_{3CD} + I_{4CD} = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2 + m_4 d_4^2 =$

$= m\underbrace{(0,6a)^2}_{0,36a^2} + 2m\underbrace{(0,8a)^2}_{0,64a^2} + 3m\underbrace{(0,6a)^2}_{0,36a^2} + 4m\underbrace{(0,8a)^2}_{0,64a^2} = 5,28a^2m$

$\boxed{I_{CD} = 5,28a^2m}$

C.A

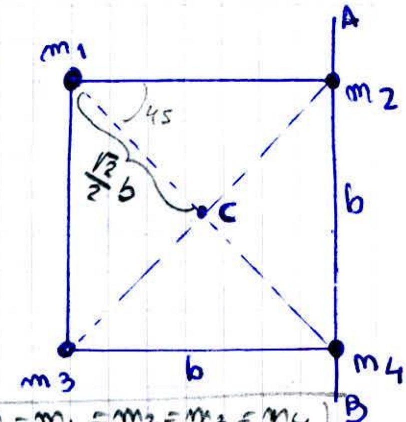
d_1:  $\quad d_1 = a\,sen(37) = \boxed{0,6a = d_1 = d_3}$

d_2:  $\quad d_2 = a\,sen(53) = \boxed{0,8a = d_2 = d_4}$

$I_{CD} = 10m\rho^2 \rightarrow 10\cancel{m}\rho^2 = 5,28\cancel{m}a^2 \rightarrow \boxed{\rho = 0,727a}$

Sylvina

③ Los cuatro puntos materiales de masas iguales de la figura se encuentran ligados por varillas de masas despreciables,



$\boxed{m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4}$

$\boxed{d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = \frac{b}{\sqrt{2}}}$

a) encontrar el momento de inercia del sistema con respecto al eje perpendicular a la página que pasa por C

$$I_{cc} = I_{1\,cc} + I_{2\,cc} + I_{3\,cc} + I_{4\,cc} =$$
$$= m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2 + m_4 d_4^2 =$$
$$= m(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) = m.\cancel{4}^{2}\frac{b^2}{\cancel{2}} = 2mb^2$$

$$\boxed{I_{cc} = 2mb^2}$$ ✓

b) calcular el radio de giro con respecto al eje AB

$$I_{AB} = m_1 b^2 + m_3 b^2 = \boxed{m\,2b^2 = I_{AB}}$$

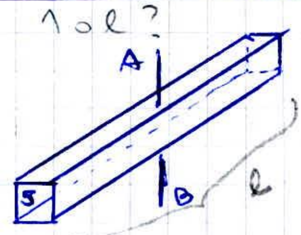
$$I_{AB} = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\rho^2 = 4m\rho^2$$

$$\cancel{m}\cancel{2}b^2 = \cancel{4}^{2}\cancel{m}\rho^2 \rightarrow \frac{b^2}{2} = \rho^2$$

$$\boxed{\rho = \frac{b}{\sqrt{2}}}$$ ✓

---

④ Dada una varilla delgada homogénea de longitud ¿o l?



a) encontrar el momento de inercia con respecto al eje baricéntrico perpendicular a su longitud y calcular el radio de giro correspondiente

$$\boxed{I_{barra} = \frac{m.l^2}{12}}$$ ✓

$$\boxed{I_{barra} = m.\rho^2}$$

$$\frac{\cancel{m}l^2}{12} = \cancel{m}\rho^2 \rightarrow \boxed{\rho = \frac{l}{\sqrt{12}}}$$ ✓

b) repetir el punto anterior con respecto a un eje paralelo al anterior pasante por el extremo de la varilla

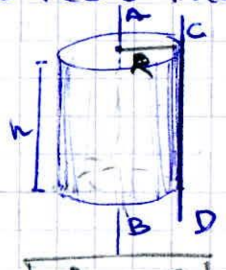
$$I_{barra\ despl.} = I_{barra} + d^2 = \frac{m.l^2}{12} + m.\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2 + 3ml^2}{12}$$

$$= \frac{4ml^2}{12} = \boxed{\frac{ml^2}{3} = I_{b\,desp}}$$

$$I_{barra} = m.\rho^2$$

$$\frac{\cancel{m}l^2}{3} = \cancel{m}\rho^2 \quad \boxed{\rho = \frac{l}{\sqrt{3}}}$$ ✓

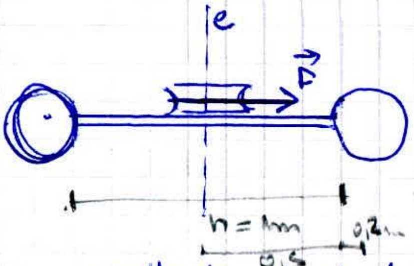
(5) Determinar los momentos de inercia de un cilindro recto macizo, con respecto a su eje de simetría y a cualquier generatriz, calculando, en cada caso los radios de giro correspondientes



$$\boxed{I_{AB} = \frac{MR^2}{2}} \quad I_{AB} = M \cdot \rho^2 \longrightarrow M\rho^2 = \frac{MR^2}{2} \quad \boxed{\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}}$$

$$I_{CD} = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \boxed{\frac{3\,MR^2}{2} = I_{CD}} \longrightarrow \frac{3\,MR^2}{2} = M\rho^2 \rightarrow \boxed{\rho = R\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

(6) La pieza homogénea de la figura está constituida por una varilla de 1m de largo y 1,2 kg de masa, 2 esferas de 0,2 m de radio y 0,1 kg de masa y una polea (cilindro) de 0,1 m de radio y 0,5 kg de masa.
El sistema gira alrededor del eje de simetría bajo la acción de una fuerza horizontal de módulo 20 N que se ejerce mediante una soga arrollada al cilindro.
Determinar:



a) el radio de giro de la pieza.

$$I_{polea\ e} = \frac{m_{polea} \cdot R_{polea}^2}{2} = \frac{0{,}5\,kg\ 0{,}1^2\,m^2}{2} = \boxed{0{,}0025\ kg\,m^2 = I_{polea\ e}}$$

$$I_{varilla\ e} = \frac{m_{varilla} \cdot h^2}{12} = \frac{1{,}2\,kg\ 1\,m^2}{12} = \boxed{0{,}1\ kg\,m^2 = I_{varilla\ e}}$$

$$I_{esfera\ e} = 1 \cdot \frac{2}{5}\, m_{esfera}\, R_{esf}^2 = \frac{2}{5}\, 0{,}1\,kg\ 0{,}2^2\,m^2 = \boxed{0{,}0016\ kg\,m^2 = I_{esfera\ e}}$$

$$I_e = I_{polea\ e} + I_{varilla\ e} + 2\left[I_{esfera\ e} + m_{esf} \cdot (0{,}5m + 0{,}2m)^2\right] =$$

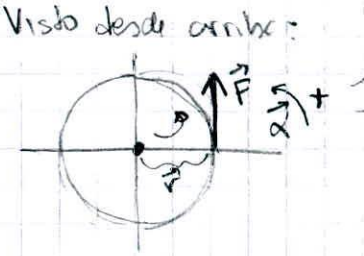
$$= 0{,}0025\,kg\,m^2 + 0{,}1\,kg\,m^2 + 2\left[0{,}0016\,kg\,m^2 + 0{,}1\,kg\ 0{,}49\,m^2\right] = 0{,}2037\,kg\,m^2$$

$$I_e = (m_{polea} + m_{varilla} + 2\ masa_{esfera})\,\rho^2 = 1{,}9\,kg\ \rho^2 = 0{,}2037\,kg\,m^2 \rightarrow \boxed{\rho = 0{,}327\,m}$$

b) la aceleración angular.

$$\Sigma \vec{M} = I_e\, \vec{\alpha}$$

Visto desde arriba:



$$\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{r}}_{\vec{M}} = I_e\, \vec{\alpha}$$

en eje z

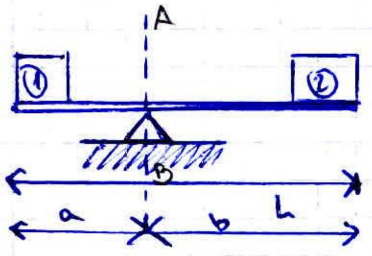
$$F\,r = I_e\, \alpha$$

$$20\,N \times 0{,}1\,m = 0{,}2037\,kg\,m^2\, \alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{9{,}81}{seg^2}}$$

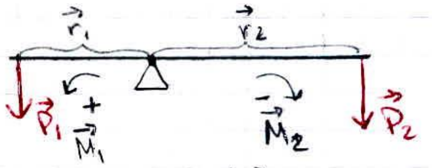
Sy

(7) Dos masas se encuentran sobre una barra rígida de peso despreciable a una distancia L de separación en tal forma que la misma se encuentra en equilibrio. Determinar el momento de inercia del sistema con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por su punto de rotación



$m_1 = 40 kg$ $\boxed{I_{AB} = m_1 a^2 + m_2 b^2}$

$m_2 = 30 kg$ En equilibrio $\rightarrow \Sigma \vec{M} = \vec{0}$



$|\vec{r}_1| = a$ $|\vec{r}_2| = b$

$\vec{M}_1 = \vec{P}_1 \times \vec{r}_1 \rightarrow M_1 = +P_1 . a$

$\vec{M}_2 = \vec{P}_2 \times \vec{r}_2 \rightarrow M_2 = -P_2 . b$

$\Sigma \vec{M} = \vec{0} \rightarrow M_1 + M_2 = 0$

$P_1 a = P_2 b \rightarrow a = \frac{P_2 b}{P_1} = \frac{300N}{400N} b$

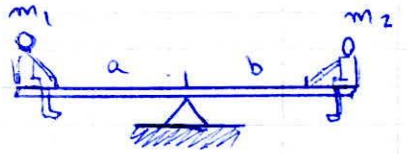
$\boxed{a = 0{,}75 b}$

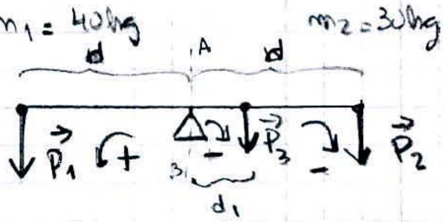
$\rightarrow \begin{cases} a + b = l \\ a = 0{,}75 b \end{cases} \rightarrow 0{,}75b + b = l = b(0{,}75+1) = b\ 1{,}75 = \frac{7}{4} b \rightarrow \boxed{b = \frac{4}{7} l \quad a = \frac{3}{7} l}$

$I_{AB} = 40 kg \left(\frac{3}{7} l\right)^2 + 30 kg \left(\frac{4}{7} l\right)^2 = \frac{120}{7} l^2$ $\boxed{I_{AB} = 17{,}14\, l^2}$

---

(8) Tres niños se sientan en un "Sube y baja". Un niño de 40 kg y otro de 30 kg en los extremos opuesto a una distancia de 2 m del punto de rotación y el tercero en una posición tal que se encuentran en equilibrio. Si el tercer niño se baja, ocasionando en consecuencia el desequilibrio, encuentre el módulo de la aceleración angular de la tabla.
(desprecie el peso de la tabla) $a = b = 2m$





$d = 2m$ $d_1 < 2m$

En equilibrio $\rightarrow \Sigma \vec{M} = \vec{0}$

$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{0}$

$P_1 . d - P_2 d - P_3 d_1 = 0$

$P_3 d_1 = P_1 d - P_2 d \Rightarrow P_3 d_1 = (P_1 - P_2) d = 200 Nm$

Cuando el niño de m_3 se retira: $\Sigma \vec{M} = I_{AB} \vec{\alpha}$

$I_{AB} = m_1 d^2 + m_2 d^2 = d^2 (m_1 + m_2) = 280 kg\, m^2$

(en $\hat{z}$)

$M_1 + M_2 = I_{AB}\, \alpha$

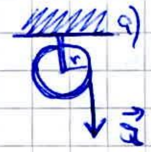
$N = kg\, m/seg^2$

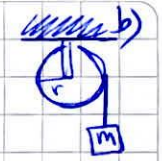
$Nm = kg\, m^2/seg^2$

$\frac{200 Nm}{280 kg\, m^2} = \frac{5}{7 seg^2}$

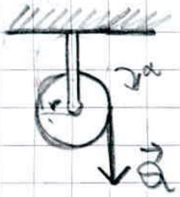
$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{0{,}71}{seg^2} \hat{k}}$

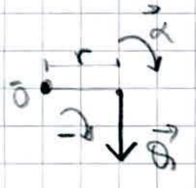
(9) Determinar el módulo de la aceleración lineal (ac. tangencial de la polea) en los sig. sistemas, compuestos por una polea de masa M y radio r y el módulo de la fuerza Q es: $|Q| = mg$





a)





$\sum \vec{M} = I_{\bar{o}} \vec{\alpha}$ en eje z $\rightarrow rQ = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{rQ}{I}$

$a_t = \alpha r \longrightarrow a_t = \frac{rQ}{I} \cdot r = \boxed{\frac{r^2 Q}{I} = a_t}$

b)

$\sum \vec{M} = I_{\bar{o}} \alpha$

$-rT = -I_{\bar{o}} \alpha \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{rT}{I}}$ $\boxed{a_t = \frac{r^2 T}{I_{\bar{o}}}}$ (I)

DCL m

$T - P = m \cdot (-a) \rightarrow \boxed{a = \frac{P - T}{m}}$ (II)

$a_t = a \rightarrow \times$ (I) $: T = \frac{a_t \cdot I_{\bar{o}}}{r^2} \xrightarrow{\text{(II)}} a \cdot m = P - T \rightarrow$

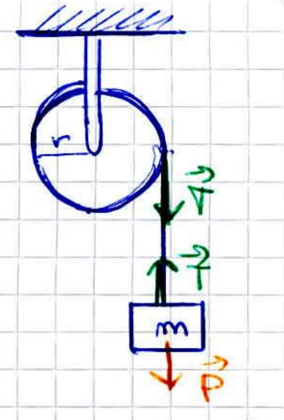
$\rightarrow a \cdot m = P - \frac{a\, I}{r^2} \rightarrow a\, m + \frac{a\, I}{r^2} = P = \frac{a m r^2 + a I}{r^2} = a\left(\frac{m r^2 + I}{r^2}\right)$

$Q = mg = P$

$\rightarrow a = P \cdot \frac{r^2}{m r^2 + I} = P\left(\frac{1}{\frac{m r^2 + I}{r^2}}\right) = \frac{P}{m + \frac{I}{r^2}} = \boxed{\frac{Q}{m + \frac{I}{r^2}} = a}$

Su

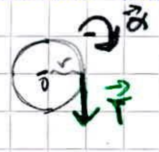
(10) Una polea de 40 cm de radio tiene un momento de inercia respecto de su eje de 1,92 kg m². La polea puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo horizontal. Sobre la polea está arrollada una cuerda inextensible y de masa y espesor despreciables. En su extremo libre se cuelga un cuerpo de masa 0,5 kg.



$a_t = \alpha R$

$\alpha = \frac{a}{R}$

a) Calcular la aceleración de este cuerpo cuando desciende verticalmente.

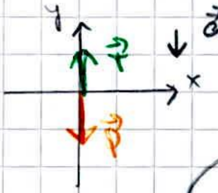


$I_O = 1,92\,kgm^2$

$r = 0.4\,m$

$-T.r = -\alpha I_O$

$T r = I_O \alpha$



$T - P = m.(-a)$

$\boxed{P - T = m.a}$

$m = 0,5\,kg \to P = 5\,N$

$\boxed{T = P - m.a}$

$(P - m.a)\,r = I_O \cdot \frac{a}{r}$

$(P - m.a)\,r^2 = I_O\, a \to P r^2 = m a r^2 + I_O\, a = a(m r^2 + I_O)$

$\to a = \frac{P r^2}{m r^2 + I_O} = \frac{5N \cdot 0,4^2 m^2}{0,5kg\; 0,4^2 m^2 + 1,92\,kgm^2} = \boxed{0,4\, m/seg^2 = a}$ ✓

b) Suponga ahora que el eje de la polea presenta rozamiento. Calcule la aceleración de m resultante si el momento de fricción tiene módulo de 2 Nm

$\Sigma \vec{M} = I_O\, \vec{\alpha}$

$P - T = m.a$

$T.0,4m - 2\,Nm = 1,92\,kgm\,\alpha$

$5N - T = 0,5kg.a \to \boxed{T = 5N - 0,5kg.a}$ (1)

(1) $(5N - 0,5kg\; a)\, 0,4m - 2\,Nm = 1,92\,kgm^2\, \frac{a}{0,4m}$

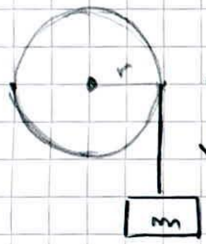
$\cancel{2Nm} - 0,2\,kgm\; a - \cancel{2Nm} = -0,2\,kgm\; a = 1,92\,kgm \cdot \frac{a}{0,4} \iff \boxed{a = 0\, m/seg^2}$ ✓

$a = \alpha r$

$\alpha = \frac{a}{r}$

Din. cuerpo rígido

(11) Una polea de 20 cm de radio puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo horizontal. Sobre dicha polea está arrollada una cuerda inextensible de espesor y masa despreciables. En su extremo libre se cuelga un cuerpo de masa 0,5 kg que desciende 40 cm en 2 seg a partir del reposo. Calcular el momento de inercia baricéntrico de la polea.



$r = 0{,}2\,m$ $\quad v_0 = 0\,m/seg$ $\qquad Y_{(t)} = \frac{a}{2} t^2$

$m = 0{,}5\,kg$ $\quad v_F = ?$

$P = 5N$ $\qquad \rightarrow Y_{(2)} = 0{,}4\,m = \frac{a}{2}\, 2^2 seg^2$

$\boxed{0{,}2\,m/seg^2 = a}$

en polea

$a_t = a$ en cuerda

$r \cdot T = I_{\bar{o}} \alpha = I_{\bar{o}} \cdot \frac{a}{r} \longrightarrow \boxed{I_{\bar{o}} = \frac{r^2\, T}{a}} \longrightarrow \boxed{I_{\bar{o}} = \frac{0{,}2^2 m^2\, T}{0{,}2\,m/seg^2}}$

$P - T = m \cdot a \rightarrow T = P - m \cdot a = 5N - 0{,}5\,kg\; 0{,}2\,m/seg^2 = \boxed{4{,}9\,N = T}$

en (I) → (II) $\rightarrow I_{\bar{o}} = \frac{0{,}2\,m \cdot 4{,}9\,N}{seg^2} = \boxed{0{,}98\,kgm^2 = I_{\bar{o}}}$ ✓

(12) Una polea de 20 cm de radio y 0,8 kgm² de mom. de inercia respecto de su eje, gira sin rozamiento alrededor de un eje fijo horizontal. Sobre la polea está arrollada una cuerda inextensible y de masa y espesor despreciables. En su extremo libre cuelga un cuerpo de masa 5 kg. Si este cuerpo pasa por una determinada posición con velocidad vertical hacia arriba y módulo 2 m/seg, calcular la altura máxima, respecto de la pos. anterior a que llegará el cuerpo

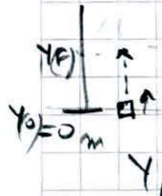
$r = 0{,}2\,m \;;\; I_{\bar{o}} = 0{,}8\,kg\,m^2 \qquad P = 50N,\; m = 5\,kg$

① $\Sigma \vec{M} = I_{\bar{o}} \vec{\alpha} \rightarrow -r\,T = -I\,\alpha \rightarrow 0{,}2\,m \cdot T = 0{,}8\,kg\,m^2 \cdot \frac{a}{0{,}2\,m}$

$\boxed{T = 20\,kg\; a}$

② : $P - T = m \cdot a \rightarrow 50N - 20\,kg\,a = 5\,kg\,a \rightarrow \boxed{|a| = 2\,m/seg^2}$

$a < 0$



en $Y(F) \rightarrow v_f = 0\,m/seg$ $\qquad a\,t = \Delta v \rightarrow t = \frac{v_F - v_0}{a}$

$t = \frac{-2\,m/seg}{-2\,m/seg^2} \rightarrow \boxed{t = 1\,seg}$

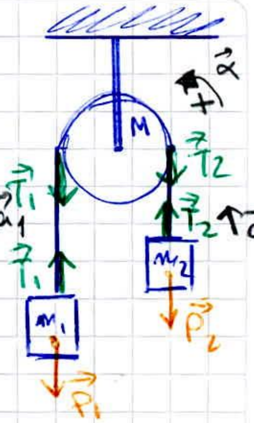
$Y_{(t)} = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \rightarrow Y_{(t)} = 2\,m/seg\; t - \frac{2\,m}{2\,seg^2} t^2$

$Y_{(tF)} = Y_{(1)} = 2\frac{m}{seg}\, 1\,seg - 1\frac{m}{seg^2}\, 1^2 seg^2 = 1\,m$

$\boxed{Y_{máx} = 1\,m}$ ✓

$a = \alpha r \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{a}{r}}$

(13) Una polea cilíndrica de masa 40 kg y de radio 20 cm puede girar sin rozamiento alrededor de un eje horizontal fijo. En su garganta existe una cuerda inextensible, sin espesor y sin masa que no resbale sobre la polea. En sus extremos hay dos cuerpos de masas $m_1 = 5\,kg$ y $m_2 = 3\,kg$. Se deja en libertad al sistema. Determinar las aceleraciones de dichos cuerpos



$\boxed{\text{Si la polea tiene masa} \rightarrow T_1 \neq T_2}$

$m_1 = 5\,kg$

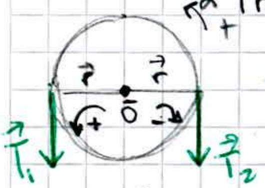
$P_1 = 50\,N$

$P_2 = 30\,N$

$m_2 = 3\,kg$

$M = 40\,kg$

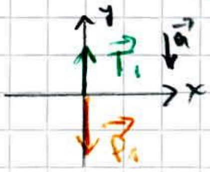
DCL Polea



$|\vec{r}| = 0{,}2\,m$ $\rightarrow \boxed{I_{cilindro}: \frac{1}{2} M r^2}$

$\Sigma \vec{M} = I_O \cdot \vec{\alpha}$

$T_1 \cancel{r} - T_2 \cancel{r} = \frac{1}{2} M r^{\cancel{2}} \cdot \alpha \rightarrow \boxed{T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M r \alpha} \xrightarrow{\alpha = \frac{a}{r}} \boxed{T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M a}$ (1)



$\Sigma F_y = m_1 a$

$\boxed{P_1 - T_1 = m_1 \cdot a}$ (2)

DCL 1

$\boxed{T_2 - P_2 = m_2 \cdot a}$ (3)

DCL 2

$\left.\begin{array}{l} (2): T_1 = P_1 - m_1 a \\ (3): T_2 = P_2 + m_2 a \end{array}\right\}$ en (1) $\rightarrow P_1 - m_1 a - P_2 - m_2 a = \frac{1}{2} M \cdot a$

$P_1 - P_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M\right) a$

$a = \frac{P_1 - P_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} = \frac{50\,N - 30\,N}{5\,kg + 3\,kg + \frac{1}{2}\,40\,kg} = \frac{20\,N}{28\,kg} \rightarrow \boxed{a = 0{,}71\,m/seg^2}$

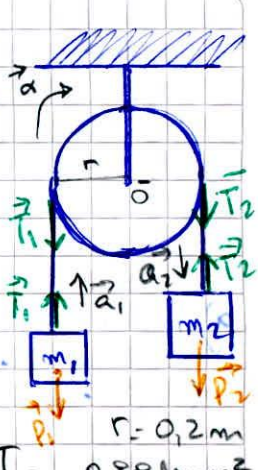
$\alpha = \frac{a}{r} = 0{,}71 \frac{m}{seg^2} \cdot \frac{1}{0{,}2\,m}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = -0{,}71\,m/seg^2 \\ a_2 = 0{,}71\,m/seg^2 \\ \alpha = 3{,}57\,rad/seg^2 \end{array}}$$

✓

$\boxed{\omega = \alpha t}$ $\boxed{a = \alpha r}$

(14) Dos cuerpos de masas $m_1 = 1kg$ y $m_2 = 2kg$ están vinculados por una cuerda inextensible, de masa y espesor despreciable, que pasa por una polea de radio 20 cm y momento de inercia respecto al eje de 0,88 kgm^2 que gira alrededor de un eje fijo horizontal.
Durante dicho giro existe un $\boxed{\text{momento de fricción constante de } 1\,Nm}$. Si se libera el dispositivo en el instante $t = 0$ hallar el valor de la velocidad angular de la polea en el instante $t = 2$ seg.



$M_{fricc} = 1Nm$ $P_1 = 10N \leftarrow m_1 = 1kg$
$P_2 = 20N$ $m_2 = 2kg$

$r = 0,2m$

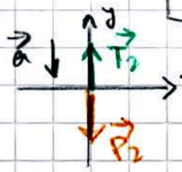
$I_{\bar{O}} = 0,88\,kgm^2$

$$\Sigma \vec{M} = I_{\bar{O}} . \vec{\alpha}$$

$$T_2 . r - T_1 r - M_{Fr} = I_{\bar{O}} \overset{a/r}{\alpha} = r(T_2 - T_1) - M_{Fr} \quad (1) \rightarrow \boxed{a = \frac{r^2 (T_2 - T_1) - r M_F}{I_{\bar{O}}}}$$

$$T_1 - P_1 = m_1 . a$$

$$\boxed{T_1 = P_1 + m_1 a} \quad (2)$$



$$P_2 - T_2 = m_2 a$$

$$\boxed{T_2 = P_2 - m_2 a} \quad (3)$$

en (1), reempl. (2) y (3) : $a = \dfrac{r^2 (P_2 - m_2 a - P_1 - m_1 a) - r M_{fricción}}{I_{\bar{O}}}$

$$a = \frac{0,2^2 \cancel{m^2} (20N - 2kg\, a - 10N - 1kg\, a) - 0,2\cancel{m} . 1N\cancel{m}}{0,88\, kg\cancel{m^2}}$$

$$a = \frac{0,4N - 0,12\, kg\, a - 0,2N}{0,88\, kg} = \frac{0.2N - 0,12\, kg\, a}{0,88 kg}$$

$$\rightarrow 0,88\, kg\, a + 0,12\, kg\, a = 0,2N \rightarrow \boxed{a = 0,2\, m/seg^2}$$

$$a = \alpha r \rightarrow \alpha = \frac{a}{r} = \frac{0,2\, \cancel{m}/seg^2}{0,2\, \cancel{m}} = \frac{1}{seg^2} = \alpha$$

$$\omega_{(t)} = \alpha t = \frac{1}{seg^2} t \rightarrow \omega_{(2)} = \frac{1}{seg^{\cancel{2}}} 2 \cancel{seg} = \frac{2}{seg}$$

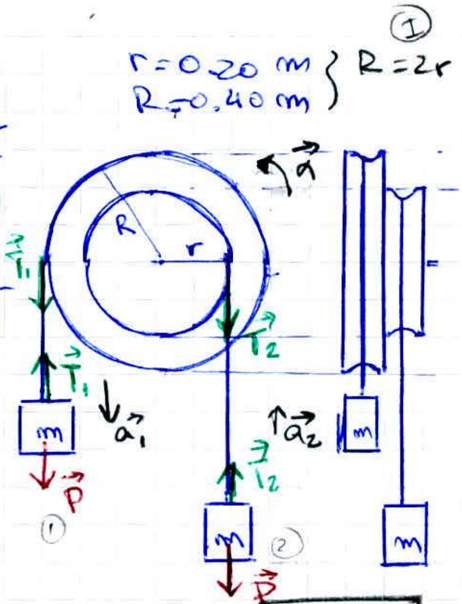
$$\boxed{\omega_{(2)} = \frac{2}{seg.}}$$

Sylvina

(15) Dos cilindros homogéneos y macizos de masas iguales a 1kg, rígidamente unidos, pueden girar alrededor de su eje común, horizontal y fijo.
El radio del cilindro mayor es 40 cm y el del cilindro menor 20 cm.
Cada uno tiene arrollada una soga inextensible y de masa y espesor despreciables en cuyos extremos libres están fijo dos cuerpos de igual masa 1kg.

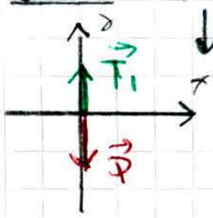
a) Hallar la aceleración angular de las poleas adosadas suponiendo que el rozamiento en el eje es despreciable

$\left.\begin{matrix} r = 0{,}20\ m \\ R = 0{,}40\ m \end{matrix}\right\}$ $R = 2r$ (I)



$$\left\{\begin{matrix} a_1 = \alpha R \overset{(I)}{=} \alpha 2r \rightarrow \frac{a_1}{2} = \alpha r \\ a_2 = \alpha . r \end{matrix}\right\} \frac{a_1}{2} = a_2 \rightarrow \boxed{a_1 = 2a_2} \ (II)$$

DCL 1



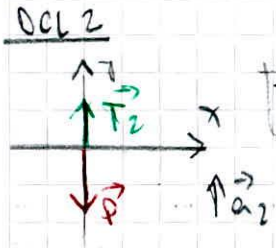
$\downarrow \vec{a}_1$ $\quad \Sigma \vec{F}_y = m . \vec{a}_1$

$\boxed{P - T_1 = m . a_1} \rightarrow \boxed{T_1 = P - m\, 2a_2}$ (III)

$a_2 = \alpha r$

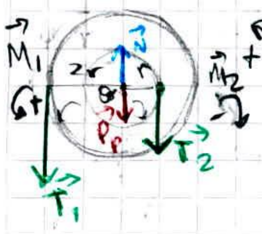
$\boxed{\alpha = \frac{a_2}{r}}$ (V)

DCL 2



$\Sigma \vec{F}_y = m . \vec{a}_2$

$\boxed{T_2 - P = m . a_2} \xrightarrow{(II)} \boxed{T_2 = P + m\, a_2}$ (IV)



$+\curvearrowleft \vec{\alpha}$ $\quad \Sigma \vec{M} = I_0 . \vec{\alpha}$

$$I_{\bar{o}} = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} m r^2 = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$$

$$\boxed{I_{\bar{o}} = \frac{1kg}{2}(0{,}4^2 + 0{,}2^2)\, m^2 = 0{,}1\ kgm^2}$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \underbrace{M_{polea}}_{0} + \underbrace{M_N}_{0} = I_0\, \vec{\alpha}$$

$$\boxed{\vec{T}_1\, 2\vec{r} - \vec{T}_2\, \vec{r} = I_{\bar{o}}\, \vec{\alpha}}\ (VI) \rightarrow \boxed{(2T_1 - T_2)\, r = I_{\bar{o}}\, \alpha}$$

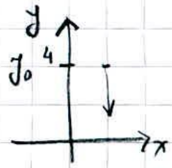
en VI → III, IV y V → $\left[2(P - 2m\,\alpha r) - (P + m\,\alpha r)\right] r = I_{\bar{o}}\, \alpha$

$$2Pr - 4m\,\alpha r^2 - Pr - m\alpha r^2 = I_{\bar{o}}\, \alpha$$

$$Pr = I_{\bar{o}}\, \alpha + 5 m \alpha r^2 = \alpha\, (I_{\bar{o}} + 5 m r^2)$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{Pr}{I_{\bar{o}} + 5 m r^2} = \frac{10N\ 0.2m}{0{,}1\ kgm^2 + 5 \times 1kg . 0{,}2^2 m^2} = \frac{2\,N\cancel{m}}{0{,}3\ kgm^2} = \boxed{\frac{6{,}67}{seg^2} = \alpha}$$

b) Suponga ahora que se deje el sistema en libertad y se comprueba que uno de los cuerpos descendió 4 m en 2 seg.
Calcular el módulo del momento que las fuerzas de fricción ejercen sobre el eje de los cilindros.



$$y(t) = 4m + \frac{a}{2}t^2 \rightarrow y(t_f) = y(2) = 0\,m = 4m + \frac{a}{2}2^2 seg^2$$

$$-\frac{4m}{2seg^2} = a \rightarrow \boxed{a = -2\,m/seg^2}$$

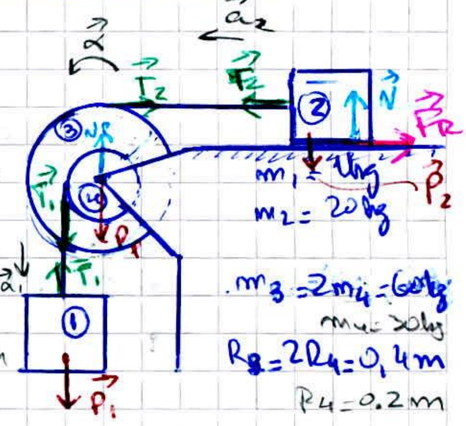
$$\vec{a}_1 = \vec{\alpha} R \rightarrow \alpha = \frac{a_1}{R} = \frac{2\,m/seg^2}{0{,}4\,m} = \frac{5}{seg^2} \qquad \rightarrow \boxed{a = 2\,m/sep^2 \text{ hacia abajo}}$$

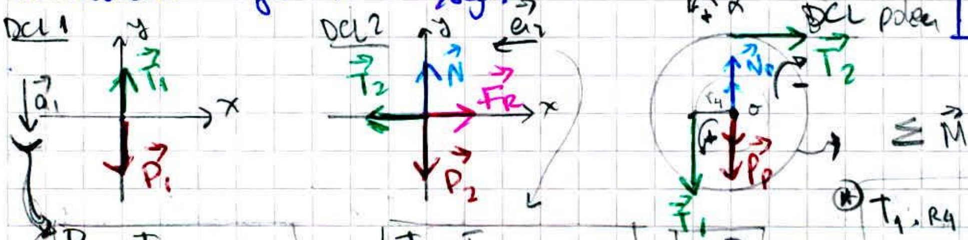
$$\boxed{\alpha = \frac{5}{seg^2}}$$

Considero que es a_1 la aceleración que resulta ser $2\,m/seg^2$ pues es la que analicé que se movía en esa dirección.

---

(16) Al descender el cuerpo de masa m_1, hace girar la polea cilíndrica y desplaza hacia la izquierda al cuerpo de masa 2. El coef. de roce cinético entre este último cuerpo y el plano horizontal es 0,1. Aceptando que las cuerdas son inextensibles, de masas y espesores despreciables, calcular la altura que descendió el cuerpo 1 hasta quedar detenido a partir de la posición para la cual la polea tenía una velocidad angular de 3/seg.





$$\Sigma \vec{M} = I_o \cdot \vec{\alpha} \quad \text{Mom. pdeas} = 0 \text{ pues } r = 0$$

$$(*)\; T_1 \cdot R_4 - T_2 \cdot R_3 = \left(\frac{1}{2}m_4 R_4^2 + \frac{1}{2}m_3 R_3^2\right)\alpha$$

$$\boxed{P_1 - T_1 = m_1 a_1} \qquad \boxed{T_2 - F_R = m_2 a_2} \text{ y } \boxed{N = P_2}$$

$$\boxed{T_1 = P_1 - m_1 a_1} \; (1) \qquad T_2 = m_2 a_2 + F_R \;,\; F_R = N\mu_c = P_2 \cdot 0{,}1 \rightarrow \boxed{T_2 = m_2 a_2 + P_2 \cdot 0{,}1} \; (2)$$

$$\begin{cases} a_1 = \alpha R_4 \\ a_2 = \alpha R_3 = \alpha \cdot 2R_4 \end{cases} \rightarrow R_4 = \frac{a_1}{\alpha} \rightarrow a_2 = \alpha \cdot 2\frac{a_1}{\alpha} \rightarrow \boxed{a_2 = 2a_1} \; (3) \;;\; \boxed{\alpha = \frac{a_1}{R_4}} \; (4)$$

1, 2, 3, 4 en (*)

$$(P_1 - m_1 a_1)\overset{0{,}2m}{R_4} - (\overset{20kg}{m_2} 2a_1 + P_2 \times 0{,}1)\overset{0{,}4m}{R_3} = \left(\frac{1}{2}m_4 R_4^2 + \frac{1}{2}m_3 R_3^2\right) \cdot \frac{a_1}{R_4}$$

$$\rightarrow 2\,Nm - 0{,}2\,kgm\,a_1 - 16\,kgm\,a_1 - 8N = 3\,kgm\,a_1 + 24\,kgm\,a_1$$

se va frenando $\rightarrow \vec{a}_1 \uparrow$

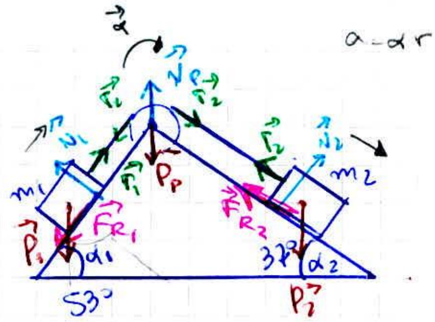
$$-6N = 43{,}2\,kgm\,a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = -0{,}139\,m/seg^2}$$

$$v_{o1} = \omega_o R_4 = \frac{3}{seg} \cdot 0{,}2m \rightarrow \boxed{v_{o1} = 0{,}6\,m/seg} \;,\; v_f = 0\,m/seg \rightarrow t_f = \frac{\Delta v_1}{a_1} = \frac{-0{,}6\,m/s}{-0{,}139\,m/seg^2} = \boxed{4{,}32s.}$$

$$\rightarrow y_1(t) = 0{,}6\frac{m}{seg}t - \frac{0{,}139}{2}\frac{m}{seg^2}t \rightarrow y_1(t_f) = 0{,}6\frac{m}{seg}t_f - 0{,}0695\frac{m}{seg^2}t_f^2$$

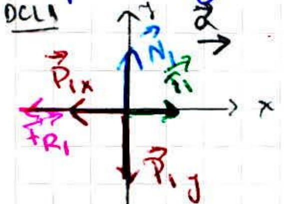
$$\rightarrow y_{(t_f)} = -0{,}6\frac{m}{seg} \cdot 4{,}32\,seg + 0{,}0695\frac{m}{seg^2} \cdot 4{,}32^2\,seg^2 = -1{,}295m \rightarrow \boxed{\text{Recorrió } 1{,}295\,m \text{ hacia abajo}}$$

(17) En el dispositivo de la figura, la polea no tiene rozamiento y la soga es inextensible y de masa y espesor despreciable.
Hallar la aceleración del cuerpo de masa m_2 sabiendo que está descendiendo

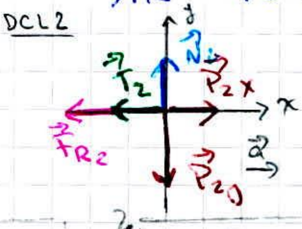


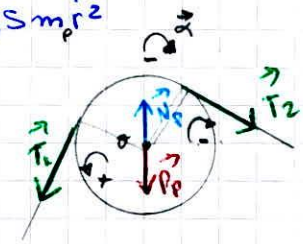
$m_1 = 10\,kg$ $P_1 = 100N$ $\alpha_1 = 53°$ $\mu_1 = 0{,}1$
$m_2 = 5\,kg$ $P_2 = 50N$ $\alpha_2 = 37°$ $\mu_2 = 0{,}2$
$m_p = 20\,kg.$ $I_P = 0{,}5\, m_p r^2$

DCL1



DCL2





$\Sigma \vec{M} = I_0 \vec{\alpha}$

$T_1 . r - T_2 r = I_P (-\alpha) = -I_P \frac{a}{r}$

$r(T_2 - T_1) = I_P \frac{a}{r}$

$\boxed{N_1 = P_{1y} \quad T_1 - P_{1x} - F_{R_1} = m_1 a}$ $\boxed{N_2 = P_{2y} \quad P_{2x} - T_2 - F_{R_2} = m_2 a}$ $\boxed{\frac{r^2(T_2 - T_1)}{I_P} = a}$ (3)

$P_{1y} = P_1 \cos(53°) = \boxed{60N = P_{1y}}$ $P_{2y} = P_2 \cos(37) = \boxed{40N = P_{2y}}$
$P_{1x} = P_1 \operatorname{sen}(53°) = \boxed{80N = P_{1x}}$ $P_{2x} = P_2 \operatorname{sen}(37) = \boxed{30N = P_{2x}}$

$F_{R_1} = N_1 . \mu_1 = P_{1y}\, \mu_1 = 60N . 0{,}1 = \boxed{6N = F_{R_1}}$; $F_{R2} = N_2 \mu_2 = P_{2y} . \mu_2 = 40N . 0{,}2 = \boxed{8N = F_{R2}}$

$\boxed{T_1 = m_1 a + P_{1x} + F_{R_1}}$ (1) $\boxed{T_2 = P_{2x} - F_{R_2} - m_2 a}$ (2)

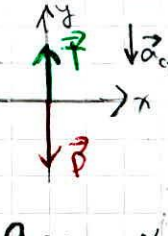
(3) $\rightarrow \frac{r^2 (T_2 - T_1)}{0{,}5 \times 20kg\, r^2} = a \rightarrow T_2 - T_1 = 10\,kg\, a \overset{(1)\,y\,(2)}{=} P_{2x} - F_{R_2} - m_2 a - m_1 a - P_{1x} - F_{R_1} =$
$= 30N - 8N - 5kg\, a - 10kg\, a - 80N - 6N$

$\rightarrow a(10kg + 5kg + 10kg) = 30N - 8N - 80N - 6N \rightarrow a = \frac{-64N}{25kg} \rightarrow \boxed{a = -2{,}56 m/seg^2}$

---

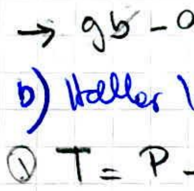
(18) Un yo-yo consiste en una masa de 100 g que tiene una cuerda enrollada y fija a su garganta como se muestra en la figura (considerar el radio interior la mitad del exterior)
$\hookrightarrow a = 2b$

ROTOTRASLACIÓN



a) Determinar el módulo de la aceleración del C.M. del cilindro en su mov. descendiente $m = 0{,}1\,kg$, $P = 1N$

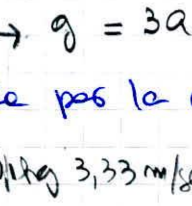
Traslación



$\downarrow a_{cm}$ $P - T = m . a_{cm}$

$\boxed{T = \underbrace{P}_{mg} - m . a_{cm}}$ (1)

Rotación $\rightarrow \boxed{radio = a}$



$\Sigma \vec{M} = I_{cm} \vec{\alpha} \rightarrow \underbrace{\vec{M}_P}_{0} + \vec{M}_T = I_{cm} \vec{\alpha}$

$\rightarrow -T . b = \frac{1}{2} m\, a^2 (-\alpha) \rightarrow \boxed{Tb = \frac{1}{2} m\, a^2 . \alpha}$ (2)

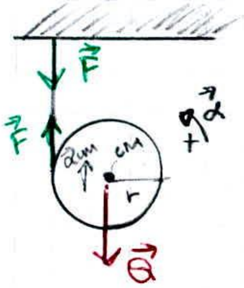
$a_{cm} = \alpha . b \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{a_{cm}}{b}} \xrightarrow{(2)\,y\,(1)} \cancel{m} \underset{P}{g} b - \cancel{m} a_{cm} . b = \frac{1}{2} \cancel{m}\, a^2 . \frac{a_{cm}}{b} \overset{(a=2b)}{=} \frac{1}{2} \cancel{m}\, 2^2 b^{\cancel{2}} \frac{a_{cm}}{\cancel{b}}$

$\rightarrow g\cancel{b} - a_{cm} \cancel{b} = 2 a_{cm} \cancel{b} \rightarrow g = 3 a_{cm} \rightarrow \boxed{a_{cm} = 3{,}33\, m/seg^2}$

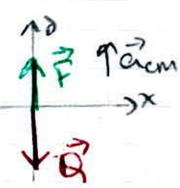
b) Hallar la fuerza realizada por la cuerda.

(1) $T = P - m . a_{cm} = 1N - 0{,}1kg\; 3{,}33\, m/seg^2 = \boxed{0{,}66 N = T}$

(19) Un disco homogéneo tiene arrollada una cuerda inextensible de masa y espesor despreciable. El otro extremo de cuerda está fijo a un soporte. El disco está enrollándose en la cuerda y su centro de masa está ascendiendo verticalmente.
Determinar la relación que existe entre el peso Q del disco y la fuerza F ejercida por el soporte.



traslación:

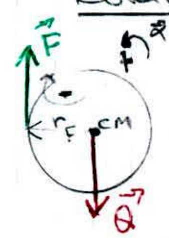


$\Sigma \vec{F}_y = m.\vec{a}_{cm}$

$\boxed{F - Q = m.a_{cm}}$ ①

$\boxed{a_{cm} = \alpha \cdot r_F}$

Rotación:



$\Sigma \vec{M} = I_{cM} \cdot \vec{\alpha}$

$M_Q = 0$ (pues $r_Q = 0$)

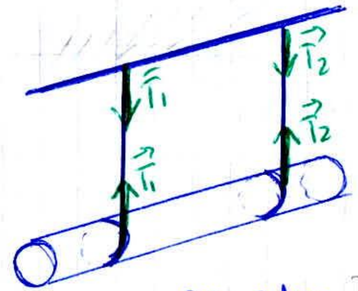
$-F.\cancel{r_F} = \frac{1}{2} m r_F^{\cancel{2}} . \alpha$

② $\boxed{-2F = m\,\alpha\, r_F = m\, a_{cM}}$

x ① y ②: $F - Q = -2F \rightarrow Q = 3F \rightarrow \boxed{\frac{Q}{F} = 3}$ ✓

---

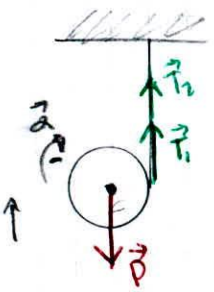
(20) Un cilindro de masa 3 kg tiene enrollados simétricamente cerca de sus dos extremos dos cuerdas de masa despreciable suspendidos del techo.
Inicialmente el cilindro se encuentra ascendiendo con las dos cuerdas verticales con una velocidad de 4 m/seg.
Hallar:



a) la máxima altura que alcanzará el cilindro

$m = 3\,kg \rightarrow P = 30N$

$v_0 = 4\,m/seg$



traslación

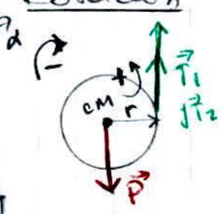
$\Sigma \vec{F}_y = m.a_{cm}$

$\boxed{T_1 + T_2 - P = m.a_{cm}}$

$T_1 = T_2 = T$

$\boxed{2T - P = m.a_{cM}}$ ①

Rotación



$T_1 = T_2 = T$

$M_P = 0$

$M_{T_1} + M_{T_2} = I_{cM}(-\alpha)$

$2M_T = 2.r\,T = -\frac{1}{2} m r^{\cancel{2}} \underbrace{\alpha}_{a_{cM}}$

② $\boxed{-4T = m.a_{cM}}$

$2T = P + m\,a_{cm} \xrightarrow{①} 4T = 2P + 2m\,a_{cM}$

$2P + 2m\,a_{cm} \overset{②}{=} -m.a_{cM}$

$3\cancel{m}\,a_{cm} = -2\cancel{m}\,g \rightarrow \boxed{a_{cm} = -6{,}67\ m/seg^2}$

$a_{cm}.t = \Delta v_{cm} \Rightarrow t_f = \frac{0 - 4\,m/seg}{-6{,}67\,m/seg^2} = \boxed{0{,}6\,seg = t_F}$

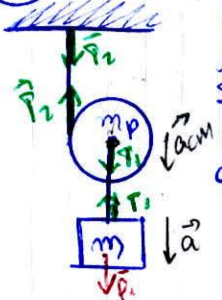
$y_{(t)} = 4\frac{m}{seg}t - \frac{6{,}67}{2}\frac{m}{seg^2}t^2 \rightarrow y_{max} = y_{(0,6)} = \boxed{1{,}20\,m = y_{max}}$ ✓

b) la fuerza que realiza cada cuerda

de ②: $T = \frac{\overset{3kg}{m}.\overset{-6{,}67\,m/seg^2}{a_{cm}}}{-4} = \boxed{5N = T}$

Sigue

(21) El sistema de la figura que inicialmente se encuentra en reposo, está constituido por una polea cilíndrica de masa 6 kg. y una pesa suspendida del eje de la polea. Si la polea tiene enrollado un hilo ideal cuyo extremo libre está unido al techo, calcular la masa de la pesa sabiendo que su aceleración es 8 m/seg²



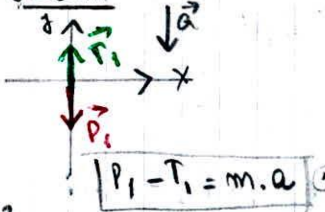
$m_p = 6\,kg$

$v_0 = 0\,m/seg$

$a = a_{CM} = 8\,m/seg^2$

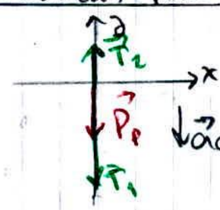
Cond. de rodadura

DCL m



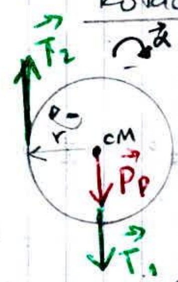
$$\boxed{P_1 - T_1 = m.a} \;①$$

Traslación polea



$$\boxed{P_p + T_1 - T_2 = m_p a_{CM}} \;②$$

Rotación



$\Sigma \vec{M} = I_{CM}\,\vec{\alpha}$

$M_{P_p} = M_{T_1} = 0$ pues $r = 0$

$$③\;\boxed{T_2 . r = I_{CM}\,\alpha}$$

$$\boxed{a_{CM} = \alpha\, r} \overset{③}{\Rightarrow} T_2 . r = I_{CM} . \frac{a_{CM}}{r} \longrightarrow T_2 . \cancel{r^2} = \frac{1}{2}\overbrace{m_p}^{6\,kg}\cancel{r^2} . \overbrace{a_{cm}}^{8\,m/seg^2} \rightarrow \boxed{T_2 = 24\,N}$$

$$\text{en ②}: T_1 = T_2 - P_p + m_p a_{CM} = 24\,N - 60\,N + 6\,kg\; 8\,m/seg^2 = \boxed{12\,N = T_1}$$

$$\text{en ①}: T_1 = \overbrace{m g}^{P_1} - m . a = m\,(g - a) \rightarrow m = \frac{T_1}{g - a} = \frac{12\,N}{2\,m/seg^2} = \boxed{6\,kg = m}$$

---

(22) Un yo-yo de radio interior r y exterior R se halla en reposo sobre un piso con rozamiento. Se tira de él con una fuerza F mediante un hilo enrollado en torno al cilindro interior. Se mantiene el hilo formando un ángulo α con la horizontal. Se observa que existe un ángulo α_c tal que para $\alpha < \alpha_c$ el carrete rueda sin deslizar en el sentido del cual se tira y para $\alpha > \alpha_c$ el yo-yo rueda sin deslizar en sentido contrario.

a) ¿cuál es el valor del ángulo α? ¿cómo se podría calcular en forma sencilla?

$a_{cm} = 0$ y $\alpha = 0$

$F . \cos(\alpha_c) - F_{RE} = 0$

$$\boxed{F \cos(\alpha_c) = F_{RE}} \;①$$

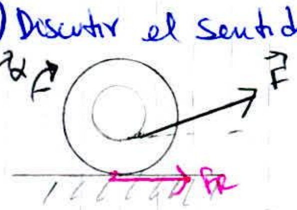
$\Sigma \vec{M}_{CM} = 0$

$F . r - F_{RE} . R = 0$

$$F\, r = F_{RE}\, R \rightarrow \boxed{F_{RE} = \frac{F r}{R}} \;②$$

$$① \text{ y } ② : \cancel{F} \cos(\alpha_c) = \frac{\cancel{F}\, r}{R} \rightarrow \boxed{\cos \alpha_c = \frac{r}{R}} \rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)}$$

b) Discutir el sentido de la fuerza de roz. en cada caso



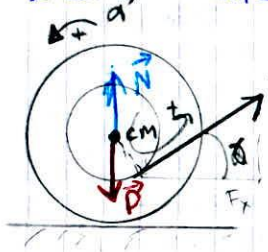
c) Existe algún caso en que se anule la FR?

NO

Dan. Ocampo Ruiz.

(23) Para el yo-yo del problema anterior, suponga que la superficie de contacto con el piso no presenta rozamiento.
Hallar, para esta situación, la aceleración angular y la aceleración lineal.

$F = 2N$ $\quad m = 0{,}5\,kg \quad \alpha = 37^\circ \quad r = 0{,}1\,m \quad R = 0{,}2\,m$



$\sum \vec{M}_{cm} = I_{cm}\,\vec{\alpha} \rightarrow M_{F_{cm}} = I_{cm} \cdot \alpha$

$M_{N_{cm}} = M_{P_{cm}} = 0$ pues $r=0$

$F \cdot r = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$

$2N \cdot 0{,}1m = \frac{1}{2}\, 0{,}5\,kg \cdot 0{,}2^2 m^2\,\alpha$

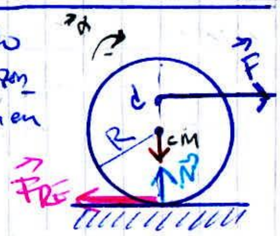
$\rightarrow \alpha = \frac{0{,}2\,Nm}{0{,}01\,kg\,m^2} = \boxed{\frac{20}{seg^2} = \alpha}$

$\sum \vec{F}_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F_x = m \cdot a_{cm}$

$F \cdot \cos(37) = 1{,}6N = 0{,}5\,kg\;a_{cm} \rightarrow \boxed{a_{cm} = 3{,}2\,m/seg^2}$

---

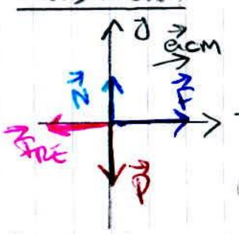
(24) Sobre un cilindro de masa m y radio R se encuentra apoyado en un plano horizontal con rozamiento y actúa una fuerza horizontal F a una distancia d sobre el centro de masa, como se muestra en la figura.
Hallar:



a) la aceleración del centro de masa del cilindro para $d = 2cm$ $\;(0{,}02\,m)$

$m = 3\,kg \quad R = 0{,}1\,m$
$F = 15N \quad \mu_E = 0{,}4$

Traslación



$\sum \vec{F}_y = 0 \rightarrow \boxed{N = P = 30\,N}$

$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_{cm}$

① $\boxed{F - F_{RE} = m \cdot a_{cm}}$

Rotación

$\sum \vec{M} = I_o\,\vec{\alpha}$

$\boxed{-F(R+d) = \left(\frac{1}{2} m R^2 + m R^2\right)(-\alpha)}$

$O \rightarrow M_P = M_N = M_{FR} = 0$

Condición de rodadura: $\boxed{a_{cm} = \alpha R} \rightarrow \alpha = \frac{a_{cm}}{R}$

$\rightarrow F(R+d) = \frac{3}{2} m R^{\cancel{2}} \cdot \frac{a_{cm}}{\cancel{R}} \rightarrow a_{cm} = \frac{F\,(R+d)}{m \cdot R} \cdot \frac{2}{3} = \frac{15N\,(0{,}1m + 0{,}02m)}{3kg \cdot 0{,}1m}\,\frac{2}{3} = \boxed{4\frac{m}{seg^2} = a_{cm}}$

b) ¿Para qué valor de d se anula la F. de Roz?

Si $F_{RE} = 0 \xrightarrow{①} \overset{15N}{F} = \overset{3kg}{m} \cdot a_{cm} \rightarrow \boxed{a_{cm} = 5\,m/seg^2} \rightarrow \frac{5m}{seg^2} = \frac{15N\,(0{,}1m + d)}{3kg\;0{,}1m}\,\frac{2}{3}$

$\rightarrow \frac{5\,m/seg^2 \cdot 0{,}9\,kgm}{30N} = 0{,}10m + d \rightarrow \boxed{d = 0{,}05m = 5cm}$

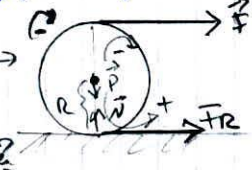
c) el valor de la F. RE si $d = R$

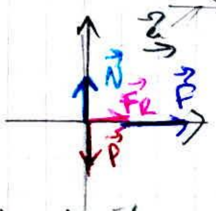
$F\,2\cancel{R} = \frac{3}{2} m R^{\cancel{2}} \frac{a_{cm}}{\cancel{R}} \rightarrow a_{cm} = \frac{4F}{3m} = \frac{60N}{9kg} = \boxed{6{,}66\,m/seg^2 = a_{cm}}$

$F - F_{RE} = m \cdot a_{cm} \rightarrow F_{RE} = F - m \cdot a_{cm} = 15N - 3kg \times 6{,}66\frac{m}{seg^2} \rightarrow \boxed{F_R = -5N}$

d) Si $d = R$, para qué valor de F el cilindro comenzará a rodar y deslizar

si $d = R$ →





$N = P = 30N$

$F_{RE\,max} = 30N \cdot 0{,}4$

$\boxed{F_{RE\,max} = 12N}$

traslación

$\boxed{F_R + F = m \cdot a_{cm}}$

$\Sigma \vec{M}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{\alpha}$

$F_R \cdot R - F \cancel{R} = \frac{1}{2} m R^2 \cdot (-\alpha)$

$F - F_R = \frac{1}{2} m \cancel{R} \cdot \frac{a_{cm}}{\cancel{R}}$

$\boxed{F - F_R = \frac{1}{2} m\, a_{cm}}$

$\boxed{2F - 2F_R = m \cdot a_{cm}}$

$F_R + F = 2F - 2F_R$

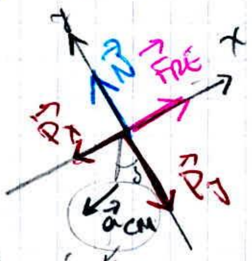
$3 \overset{12}{F_R} = F \longrightarrow \boxed{F > 36N}$ ✓

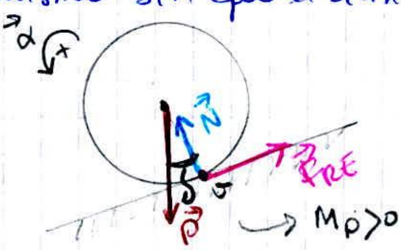
$F_{RE\,MAX} = 12\,N$

---

(25) Se deja caer un cilindro de masa m rodando sobre un plano inclinado. Sabiendo que el coeficiente de roz. estático entre el cilindro y el plano es de 0,5, hallar el ángulo máximo que puede tener el mismo sin que el cilindro deslice sobre el plano.

$\mu e = 0.5$





Traslación

en y

$\boxed{N = P_y = mg\cos(\delta)}$

$\boxed{P_x = mg\,\mathrm{sen}(\delta)}$

$\boxed{F_{RE\,max} = mg\cos(\delta)\,\overset{\mu e}{0.5}}$

en x

$\boxed{P_x - F_{RE} = m \cdot a_{cm}}$

cond. rod.

$\boxed{a_{cm} = \alpha\, r}$

$\alpha = \frac{a_{cm}}{r}$

$\cancel{m} g\,\mathrm{sen}(\delta) - \cancel{m} g \cos\delta\; 0.5 = \cancel{m} \cdot a_{cm}$

$\rightarrow \boxed{a_{cm} = g\left(\mathrm{sen}(\delta) - \frac{1}{2}\cos(\delta)\right)}$ (1)

Rotación

$\Sigma \vec{M} = I_O\, \vec{\alpha}$

$P \cdot r\,\mathrm{sen}(\delta) = \left(\frac{1}{2} m r^2 + m r^2\right) \alpha$

$P \cancel{r}\,\mathrm{sen}(\delta) = \frac{3}{2} m \cancel{r^2} \frac{a_{cm}}{\cancel{r}}$

$\cancel{m} g\,\mathrm{sen}(\delta) = \frac{3}{2} \cancel{m}\, a_{cm}$

$\boxed{\frac{2}{3} g\,\mathrm{sen}(\delta) = a_{cm}}$ (2)

de (1) y (2): $\cancel{g}\left(\mathrm{sen}(\delta) - \frac{1}{2}\cos(\delta)\right) = \frac{2}{3} \cancel{g}\,\mathrm{sen}(\delta)$

$\mathrm{sen}(\delta) - \frac{2}{3}\mathrm{sen}(\delta) = \frac{1}{2}\cos(\delta)$

$\frac{1}{3}\mathrm{sen}(\delta) = \frac{1}{2}\cos(\delta)$

en δ en donde $\cos(\delta) = 0 \rightarrow \mathrm{sen}(\delta) \neq 0 \rightarrow \cos(\delta) \neq 0$

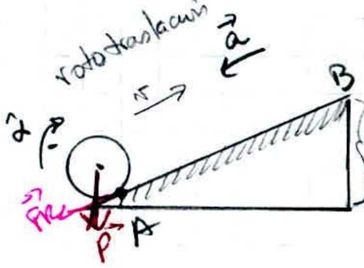
$\frac{\mathrm{sen}(\delta)}{\cos(\delta)} = \frac{3}{2} \rightarrow tg(\delta) = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\delta = 56°\,18'\,35''}$

$\boxed{\omega = \frac{v}{R}}$

$E_{c\,rot} = \frac{1}{2} I_O \omega^2$

$E_{c\,trasl.} = \frac{1}{2} m v_{i\,O}^2$

(26) Una esfera maciza tiene una velocidad inicial de módulo 4 m/seg cuando empieza a subir por un plano inclinado rodando sin resbalar. ¿A qué altura llega por encima de su nivel de partida antes de detenerse? $I_{CM} = \frac{2}{5} m r^2$

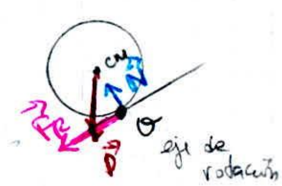


$|\vec{v}_{i\,CM}| = 4$ m/seg , $v_{f\,CM} = 0$ m/seg

rodando sin resbalar $\rightarrow F_{RE} \rightarrow W_{F_{RE}} = |F_{RE}|\,|\Delta x|\,\cos 180 = 0$
F. No conservativa, pero $\Delta x = 0$ m, su trabajo es 0 J

$\Delta E_m = 0\,J \rightarrow E_{m\,i} = E_{m\,f}$

En el punto de contacto, $\exists\, F_{RE} \rightarrow$ NO SE MUEVE $\rightarrow$ $\boxed{\text{en } O}$ $v_i = 0$ m/seg. (para traslación)



- $E_{m\,i} = E_{c\,trasl\,i} + E_{c\,rot.\,i} + E_{p\,i} =$

$$= \frac{1}{2} m \overset{0}{v_{i\,O}^2} + \frac{1}{2} I_O \omega_i^2 + m.g\overset{0}{h_A} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m r^2 + m r^2\right)\left(\frac{v_{CM\,i}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} m \cancel{r^2} \frac{16\ m^2/seg^2}{\cancel{r^2}} = \boxed{11{,}2\ m^2/seg^2\ masa = E_{m\,i}}$$

- $E_{m\,f} = E_{c\,trasl\,f} + E_{c\,rot\,f} + E_{p\,f} =$

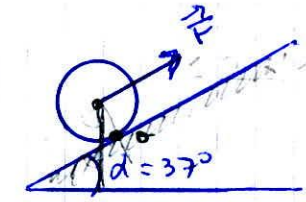
$$= \frac{1}{2} m \overset{0}{v_{f\,O}^2} + \frac{1}{2} I_O \omega_f^2 + m g h_B = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} m r^2\right)\left(\frac{\overset{0\ (\text{se detiene})}{v_{CM\,f}}}{r}\right)^2 + mgh = \boxed{mgh = E_{m\,f}}$$

$E_{m\,i} = E_{m\,f} \rightarrow 11{,}2\ \frac{m^2}{seg^2}\ \cancel{masa} = \cancel{masa} . g\, h_B \rightarrow h_B = \frac{11{,}2\ m^2/seg^2}{10\ m/seg^2} = 1{,}12$ m

$$\boxed{h_B = 1{,}12\ m}$$

Sylvina

(27) Se tira de un cilindro de masa 2 kg que se encuentra sobre un plano inclinado con rozamiento por medio de una cuerda con una fuerza F como indica la figura. Hallar los valores de F y de la fuerza de rozamiento sabiendo que el cilindro asciende rodando sin resbalar con una aceleración de 2 m/seg².

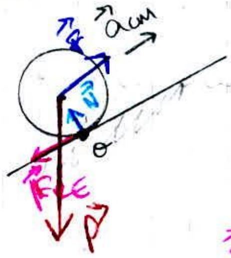


$m = 2\,kg \quad a = 2\,m/seg^2$

$P = 20N$

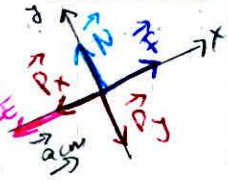
$P_y = 20N \cos 37 = \boxed{16\,N = P_y}$

$P_x = 20\,N \operatorname{sen} 37 = \boxed{12\,N = P_x}$



$N_o = 0\,m/seg$ (rueda sin resbalar)

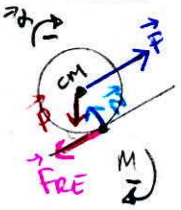
Traslación



$N = P_y = 16N$

$F - P_x - F_{RE} = m \cdot a_{cm} \rightarrow \boxed{F = m \cdot a_{cm} + P_x + F_{RE}}$ ①

Rotación



Cond. rodadura $a_{cm} = \alpha r$

$\Sigma \vec{M}_{cm} = I_{cm} \cdot \vec{\alpha}$

$\underbrace{\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}}}_{r=0 \rightarrow M=0} + \underbrace{\vec{M}_{\vec{N}}}_{\operatorname{sen}180 = 0} + \vec{M}_{F_{RE}} = \vec{M}_{F_{RE}} = I_{cm}\,\vec{\alpha}$

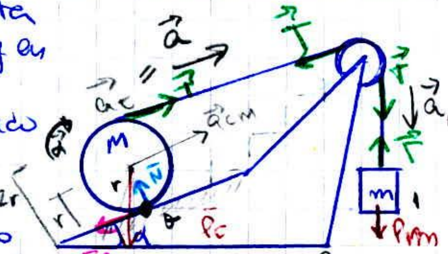
$-F_{RE} \cdot \cancel{r} = \frac{1}{2} m r^{\cancel{2}} \left(-\frac{a_{cm}}{\cancel{r}}\right)$

$F_{RE} = \frac{1}{2} m\, a_{cm} = \frac{1}{2}\, 2kg\, 2 m/seg^2 = \boxed{2N = F_{RE}}$

$F_{RE} = 2N \xrightarrow{①} F = 2kg\, 2 m/seg^2 + 12N + 2N = \boxed{18N = F}$

---

(28) Un cilindro de peso 10 N tiene enrollada una cinta delgada que pasa por una polea de masa despreciable y en cuyo extremo ~~fajo~~ está fijo un cuerpo de peso 20N.
Si $\alpha = 30°$ y el cilindro está subiendo por el plano inclinado sin resbalar, hallar:



a) la aceleración del centro de masa del cilindro y del cuerpo

$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_{cm} = \vec{\alpha}\, r \\ \vec{a}_t = 2r\vec{\alpha} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{2\, a_{cm} = a_t}$ ⑤ $a_t = a$

TRASLACIÓN

DCL cilindro con respecto a O: $a_{cm} = \alpha r$

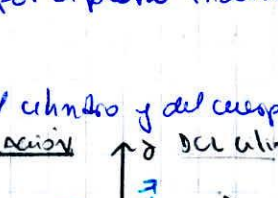
$a_t = 2r\,\alpha$

DCLm

$\Sigma \vec{F}_y = m\,\vec{a}$

$\boxed{P_m - T = m_1 a}$ ①

$\boxed{T = P_m - m_1 2 a_{cm}}$



$\boxed{N = P_y}$ ②

$\boxed{T - P_x - F_{RE} = m_c a_{cm}}$ ③

ROTACIÓN

$\Sigma \vec{M}_O = J_O \vec{\alpha}$

$\boxed{M_T + M_P = J_O \vec{\alpha}}$ ④

Rotación: ④ $-T 2r + P \operatorname{sen}(30) r = \left(\frac{1}{2} m_c r^2 + m_c r^2\right) \cdot (-\alpha)$ $\quad \boxed{a_{cm} = \alpha \cdot r}$

$\cancel{r}(T2 - P \operatorname{sen}(30)) = \frac{3}{2} m_c r^{\cancel{2}} \cdot \frac{a_{cm}}{\cancel{r}} \rightarrow \boxed{2T - P \operatorname{sen}(30) = \frac{3}{2} m_c a_{cm}}$ ⑥

⑥ y ① $\quad 2(P_m - m_1 2 a_{cm}) - P_c \operatorname{sen}(30) = \frac{3}{2} m_c a_{cm}$

$2(20N - 4kg\, a_{cm}) - 10N \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1kg\, a_{cm}$

$40N - 5N = \left(\frac{3}{2} kg + 8\, kg\right) a_{cm} \rightarrow \boxed{a_{cm} = 3{,}68\, m/seg^2} \xrightarrow{⑤} \boxed{a_1 = 7{,}36\, m/seg^2}$

$\boxed{\omega = \alpha t}$

b) el valor de la fuerza de rozamiento

$$\left.\begin{array}{l} *③ \quad T = m_c\, a_{cm} + P_x + F_{RE} \\ *① \quad T = P_1 - m_1\, 2a_{cm} \end{array}\right\} \quad m_c\, a_{cm} + P_x + F_{RE} = P_1 - m_1\, 2\, a_{cm}$$

$$1\,kg\; 3{,}68\,m/seg^2 + P_c \operatorname{sen}(30) + F_{RE} = 20\,N - 2\,kg\; 2 \times 3{,}68\,m/seg^2$$

$$F_{RE} = 20N - 14{,}72N - 3{,}68N - 10N\tfrac{1}{2} = \boxed{-3{,}4\,N = F_{RE}}$$

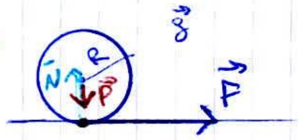
↑ < 0 → apuntaba para el otro lado

c) La intensidad de la fuerza que soporta la cuerda

$$T = P_1 - m_1\, 2a_{cm} = 20N - 2kg\; 2 \times 3{,}68\, m/seg^2 = \boxed{5{,}28N = T}$$

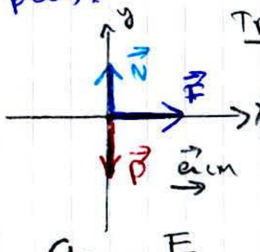
---

(29) Sobre una superficie horizontal sin rozamiento se tira con una fuerza $\vec{F}$ un cilindro de radio R y masa m. Se aplica la fuerza mediante un hilo arrollado en torno al cilindro, partiendo del reposo.



Determinar la posición y velocidad angular t segundos después.

Traslación



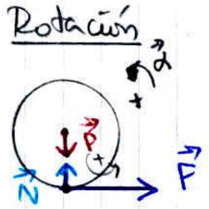
$\boxed{N = P}$

$\boxed{F = m \cdot a_{cm}}$

$$a_{cm} = \frac{F}{m}$$

$$x_{(t)} = \frac{1}{2} a_{cm}\, t^2 \rightarrow \boxed{x_{(t)} = \frac{F}{2m} \cdot t^2}$$

Rotación



$$\Sigma \vec{M}_{cm} = I_{cm}\, \vec{\alpha}$$

$$F \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \cdot \alpha$$

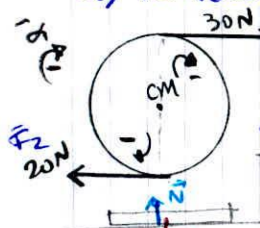
$$F = \frac{1}{2} m R \cdot \alpha \qquad \omega_0 = 0 \text{ (reposo)}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2F}{mR}} \rightarrow \boxed{\omega_{(t)} = \frac{2F}{mR}\, t}$$

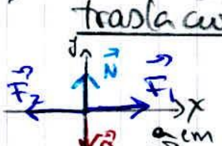
---

(30) Un disco homogéneo de 100kg y 0,5 m de radio se coloca plano sobre el hielo. Dos patinadores arrollan cuerdas alrededor del disco en el mismo sentido. Cada uno de ellos tira de su cuerda y patina alejándose de modo que ejercen fuerzas de 30N y 20N en la misma dirección y sentido contrario. Expresar:

a) la velocidad y posición del centro de masa



traslación



$\boxed{F_1 - F_2 = m \cdot a_{cm}}$

$30N - 20N = 100kg \cdot a_{cm}$

$\boxed{a_{cm} = 0{,}1\, m/seg^2}$

$v_{0\,cm} = 0$

(X) resp. 1 m/seg²

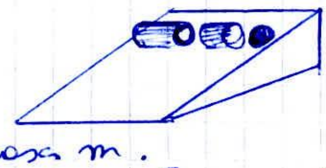
$$v_{cm} \overset{!}{=} a_{cm}\, t \rightarrow \boxed{v_{cm} = 0{,}1\, \frac{m}{seg^2}\, t} \qquad x_{(t)} = \frac{a_{cm}}{2} t^2 \rightarrow \boxed{x_{(t)} = 0{,}05 \frac{m}{seg^2} t^2}$$

b) la velocidad angular en función del tiempo $\quad r = 0{,}5m$

$$\Sigma \vec{M}_{cm} = I_{cm}\vec{\alpha} \Rightarrow F_1 \cancel{r} + F_2 \cancel{r} = \frac{1}{2} m r^{\cancel{2}} \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2(F_1 + F_2)}{mr} = 2 \rightarrow \boxed{\omega_{(t)} = \frac{2}{seg}\, t}$$

Sig!

3i) Una rampa de 2m de longitud se ajusta a un ángulo de 5° con la horizontal. Inicialmente se encuentra en la parte superior un cilindro macizo de radio R y masa m, una esfera maciza de radio R y masa m, y un tubo de paredes delgadas de radio R y masa m.



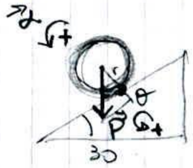
Se sueltan simultáneamente y ruedan sin resbalar. Hallar:

① $I_{cil.\ hueco} = MR^2$

② $I_{cil\ macizo} = \frac{1}{2}MR^2$

③ $I_{esfera} = \frac{2}{5}MR^2$

a) las aceleraciones de cada cuerpo



$$\sum \vec{M}_\theta = I_\theta \vec{\alpha}$$

Cil. hueco: $P\,sen(5°) \cdot R = (MR^2 + MR^2)\,\alpha_1$

$$\cancel{M} g\,sen(5°) \cancel{R} = 2\cancel{M}R^{\cancel{2}}\,\alpha_1 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{g\,sen(5°)}{2R}}$$

$$a_{cm_1} = \alpha_1 R = \frac{g\,sen(5°)}{2\cancel{R}} \cdot \cancel{R} = \boxed{0{,}436\ m/seg^2 = a_{cm_H}}$$ ✓

cil. macizo: $P\,sen(5°)\,R = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\alpha_2$

$$\cancel{M} g\,sen(5°)\,\cancel{R} = \frac{3}{2}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\,\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{g\,sen(5°)\,2}{3R}$$

$$a_{cm_2} = \alpha_2 R = \frac{g\,sen(5°)\,2}{3\cancel{R}} \cdot R = \boxed{0{,}581\ m/seg^2 = a_{cm_M}}$$ ✓

Esfera: $P\,sen(5°)\,R = \left(\frac{2}{5}MR^2 + MR^2\right)\alpha_3$

$$\cancel{M} g\,sen(5°)\,\cancel{R} = \frac{7}{5}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\,\alpha_3 \rightarrow \alpha_3 = \frac{g\,sen(5°)\,5}{7R}$$

$$a_{cm_3} = \alpha_3 R = \frac{g\,sen(5°)\,5}{7\cancel{R}} \cdot \cancel{R} = \boxed{0{,}623\ m/seg^2 = a_{cm_E}}$$ ✓

b) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar cada uno a la base de la rampa?

$$X_{1(t)} = \frac{1}{2}a_{cm_1}t^2 \longrightarrow X(tf_1) = 2m = \frac{0{,}436}{2}\frac{m}{seg^2}\,t^2 \rightarrow \boxed{t_1 = 3{,}03\ seg}$$ ✓

$$X_{2(t)} = \frac{1}{2}a_{cm_2}t^2 \longrightarrow X(tf_2) = 2m = \frac{0{,}581}{2}\frac{m}{seg^2}\,t^2 \longrightarrow \boxed{t_2 = 2{,}62\ seg}$$ ✓

$$X_{3(t)} = \frac{1}{2}a_{cm_3}t^2 \longrightarrow X(tf_3) = 2m = 0{,}623\,\frac{m}{seg^2}\,t^2 \rightarrow \boxed{t_3 = 2{,}53\ seg}$$ ✓

c) Repetir a) y b) para una partícula que desliza por un plano inclinado sin rozamiento y con la misma pendiente.

$$P_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow \cancel{M} g\,sen(5°) = \cancel{M}\,a_{cm} \rightarrow \boxed{a_{cm} = 0{,}871\ m/seg^2}$$ ✓

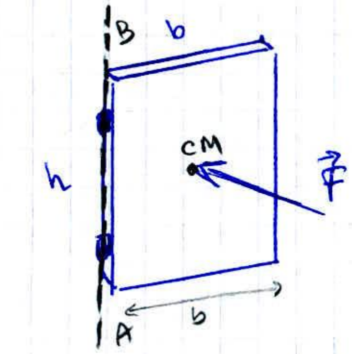
$$X_{(t)} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 = 0{,}435\,\frac{m}{seg^2}\,t^2 \rightarrow X(tf) = 2m = 0{,}435\,\frac{m}{seg^2}\,t_f^2 \rightarrow \boxed{tf = 2{,}14\ seg}$$ ✓

Dinámica

Cuerpo rígido

(32) Una puerta uniforme tiene una altura h, un ancho b y una masa m.

a) Determinar el momento de inercia alrededor de un eje que pase por sus bisagras



$$\boxed{I_{AB} = \frac{1}{3} m b^2}$$

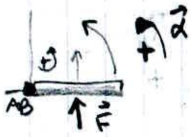
b) Calcular el módulo de la aceleración angular de la puerta en un instante en que el viento sopla perpendicularmente a ella con presión p (N/m^2)

$$\Sigma \vec{M}_{AB} = I_{AB}\,\vec{\alpha}$$

$$\boxed{F = p \cdot \text{área} = p \cdot b \cdot h} \quad (1)$$

$[p] \cdot [\text{área}]$

$N/m^2 \quad m^2$



$$F \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{3} m b^2 \alpha$$

(1) $$\frac{p \cdot \cancel{b} \cdot h\, b}{2} = \frac{1}{3} m \cancel{b^2} \alpha \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{p \cdot h\, 3}{2m}}$$

Trabajo - Energía - Impulso - Momento de la cantidad de Movimiento

(33) Encuentre la energía de rotación de la tierra (como esfera uniforme) en torno a su eje.
La masa de la tierra es de $5,98 \times 10^{24}$ kg y su radio aproximadamente $6,4 \times 10^{8}$ m

$$E_c = E_{c\,ROTACIÓN} = \frac{1}{2} I_{esfera_{cM}} \omega^2$$

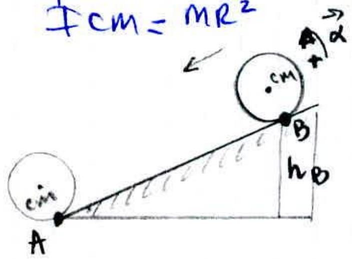
- $I_{esfera\ cM} = \frac{2}{5} m R^2 = \frac{2}{5} \cdot 5,98 \times 10^{24}\ kg \cdot (6,4 \times 10^{6}\ m)^2 = 9,798 \times 10^{37}\ kg\,m^2$

- ω: la tierra tarda 24 horas (86400 seg) en dar una vuelta $\rightarrow \boxed{T = 86400\,seg}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400\,s} = \boxed{\frac{\pi}{43200\,seg} = \omega}$$

$$E_{c\,ROT} = \frac{1}{2} \times 9,798 \times 10^{37}\ kg\,m^2 \left(\frac{\pi}{43200\,s}\right)^2 = \boxed{2,59 \times 10^{29}\ J = E_{c\,ROT}}$$

(34) Un aro rueda sin deslizar cuesta abajo por la ladera de una colina partiendo del reposo. Cuando alcanza la base, el módulo de su velocidad es de 8 m/seg. ¿Desde qué altura de la base fue soltado? ¿Con qué velocidad llegaría una partícula que desciende sin rozamiento desde la altura calculada?
$I_{CM} = MR^2$



$v_{cm_i} = 0\,m/seg = v_{cm_B}$

$v_{cm_f} = v_{cm_A} = 8\,m/seg$

Rueda SIN DESLIZAR $\rightarrow$ en cada punto de contacto con la rampa $\rightarrow v_{t_{\sigma}} = 0\,m/seg$ pues tiene FR ESTÁTICO

Como en cada punto de contacto, la única fuerza no conservativa es FRE y no produce desplazamiento entonces Δx de FRE es CERO $\rightarrow \boxed{W_{FROZ\,EST} = 0\,J}$

$\rightarrow \Delta E_m = 0$

- $E_{m_B} = E_{c\,ROT_B} + E_{c\,TRASL\,B} + E_{p\,B} = \frac{1}{2} I_B \overbrace{\omega_B^2}^{0,\text{ pues parte del reposo}} + \frac{1}{2} m \underbrace{v_{t_B}^2}_{0 \text{ pues no resbala}} + mgh_B$

$\boxed{E_{m\,B} = Mgh_B}$

- $E_{m\,A} = E_{c\,ROT\,A} + E_{c\,TRASL\,A} + E_{p\,A} = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} m \overbrace{v_{t_A}^2}^{0,\text{ pues no resbala}} + mg \overbrace{h_A}^{0\,m} =$

$= \frac{1}{2}(MR^2 + MR^2)\cdot\left(\frac{v_{cmA}^2}{R^2}\right) \pm M v_{CMA}^2 = \boxed{M \cdot 64 \frac{m^2}{seg^2} = E_{m\,A}}$ (desprec.)

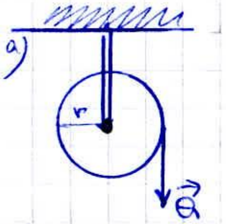
$\rightarrow \Delta E_m = 0 \rightarrow E_{m\,A} = E_{m\,B} \rightarrow Mgh_B = M\,64\frac{m^2}{seg^2} \rightarrow \boxed{h_B = 6,4\,m}$ ✓

- Partícula: $\Sigma W = \Delta E_m = 0\,J$; $E_{m_B} = mgh_B$ (parte del reposo) $\rightarrow \boxed{E_{m_B} = Mg\,6,4\,m}$ ✓

$E_{m\,A} \underset{h_A=0}{=} \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} M v_A^2 \longrightarrow E_{m\,A} = E_{m\,B} \rightarrow Mg\,6,4\,m = \frac{1}{2} M v_A^2 \rightarrow \boxed{v_A = 8\sqrt{2}\ m/seg}$ ✓

Dinámica cuerpo rígido

(35) a) ¿Qué trabajo realizará la fuerza que ejerce la cuerda enroscada sobre el volante de masa 4 kg y radio 10 cm de la figura a), si se tira con una fuerza Q de módulo 2 N haciendo describir al volante una vuelta completa?



$m = 4\,kg$

$r = 0.1\,m$

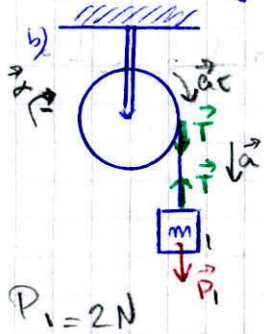
$Q = 2\,N$

$\vec{Q}$ actúa, 1 vuelta completa $=$ perímetro $= \pi D = \pi 2R$

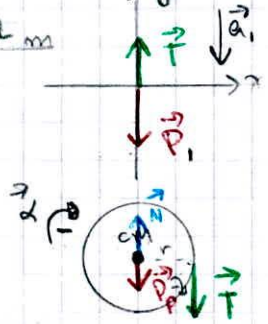
$\rightarrow \Delta x = \pi \cdot 2 \cdot 0{,}1\,m = \boxed{0{,}2\pi = \Delta x}$

$W_{\vec{Q}} = |\vec{Q}| \cdot |\Delta x| \cos 0 = 2N \cdot 0{,}2m\pi = \boxed{W_{\vec{Q}} = 0{,}4\pi\,J}$ ✓

b) Calcular el trabajo realizado por la fuerza que ejerce la cuerda si al extremo de la misma se encuentra un cuerpo de peso 2 N (fig b)) al girar una vuelta completa.



DCL m



$P_1 - T = m_1 a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = \dfrac{P_1 - T}{m_1}}$ (1)

$\sum \vec{M} = I_{cm} \vec{\alpha}$ $\qquad a_t = \alpha r$

$\underbrace{\vec{M}_N}_{0} + \underbrace{\vec{M}_{P_p}}_{0} + \vec{P}_T = I_{cm} \cdot \dfrac{\vec{a}_t}{r}$

$T \cdot r = I_{cm} \dfrac{a_t}{r} \rightarrow \boxed{T = \dfrac{I_{cm}\, a_t}{r^2}}$ (2)

$P_1 = 2N$

$m_1 = 0{,}2\,kg$

$m_p = 4\,kg$

$\boxed{a_t = a_1}$

(1) y (2)

$a_1 = \dfrac{P_1 - \dfrac{I_{cm} a_1}{r^2}}{m_1} \rightarrow m_1 a_1 = \dfrac{P_1 r^2 - I_{cm} a_1}{r^2}$

$\rightarrow m_1 a_1 \cancel{r^2} = P_1 \cancel{r^2} - \frac{1}{2} m_p \cancel{r^2} a_1 \rightarrow a_1 (m_1 + \frac{1}{2} m_p) = P_1$

$a_1 = \dfrac{P_1}{m_1 + \frac{1}{2} m_p} = \dfrac{2N}{0{,}2kg + 2kg} = \boxed{0{,}909\,m/seg^2 = a_1}$

(1) $a_1 m_1 = P_1 - T \rightarrow T = P_1 - m_1 a_1 = 2N - 0{,}2kg\ 0{,}909\,m/seg^2 = \boxed{1{,}8181\,N = T}$

$W_T = |\vec{T}|\,|\Delta x| \cos 0 = 1{,}8181 N \cdot 0{,}2\pi m = \boxed{1{,}1424\,J = W_T}$ ✓

c) Hallar, en ambos casos, la velocidad angular final del volante

• $W_Q = \Delta E_m = \Delta E_c = \Delta E_{c\,rotación} = E_{c\,rot\,f} - \overbrace{E_{c\,rot\,i}}^{0 \text{ (parte del reposo)}} =$

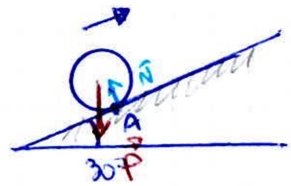
$= \frac{1}{2} I_{cm} \omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_p r^2 \omega_f^2\right) = 0{,}4\pi J \rightarrow \omega_{f_1}^2 = \dfrac{0{,}4\pi J \cdot 4}{0{,}1^2 m^2\ 4kg} \rightarrow \boxed{\omega_{f_1} = 11{,}21/seg}$ ✓

• $W_T = E_{c\,rot\,f} - \overbrace{E_{c\,rot\,i}}^{0 \text{ (parte del reposo)}} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_p r^2\right) \omega_{f_2}^2 =$

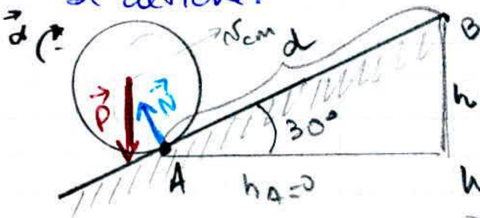
$= \frac{1}{4}\, 4kg\ 0{,}1^2 m^2\ \omega_{f_2}^2 = 1{,}1424\,J \rightarrow \boxed{\omega_{f_2} = 10{,}69/seg}$ ✓

Sig!

(36) Una esfera homogénea sube rodando sin resbalar por un plano inclinado 30° con la horizontal. En un punto de su trayectoria el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de módulo 10 m/seg. Hallar:



a) la distancia recorrida por el centro de masa hasta el punto que se detiene.



En cada punto de contacto con la sup, la esfera no resbala pues actúa $F_{RE\,ESTÁTICA}$ por lo que no se desplaza $\rightarrow \Delta x = 0 \rightarrow \boxed{W_{FRE} = 0\,J}$

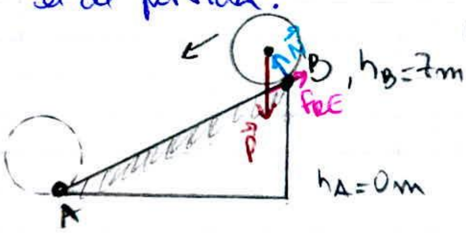
$$W_{F_{REST}} = \Delta E_m \rightarrow E_{m_B} = E_{m_A}$$

- $E_{m_B} = \underbrace{E_{c\,ROT_B}}_{0} + \underbrace{E_{c\,trasl_B}}_{0} + E_{p_B} = \frac{1}{2} I_A \overbrace{\omega_B^2}^{0\ (\text{se detiene})} + \frac{1}{2} m \overbrace{v_A^2}^{0} + \boxed{m g h_B = E_{m_B}}$
- $E_{m_A} = E_{c\,ROT_A} + \overbrace{E_{c\,trasl_A}}^{0\ (\text{no desliza})} + \overbrace{E_{p_A}}^{0\ \text{pues } h_A=0} = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 + m g \overbrace{h_A}^{0} = \boxed{\frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = E_{m_A}}$

$$\rightarrow m g h_B = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m r^2 + m r^2\right) \frac{v_{cm\,A}^2}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} m \cancel{r^2}\right) \frac{v_{cm\,A}^2}{\cancel{r^2}}$$

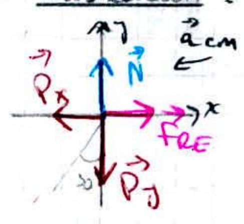
$$h_B = \frac{7}{10} \frac{\cancel{m}\, v_{cm\,A}^2}{\cancel{m}\, g} = \frac{7}{10} \frac{\cancel{10^2}\, m^2/seg^2}{\cancel{10} \times 10\, m/seg^2} = 7\,m = h_B \xrightarrow{h_B = d\,sen(30)} \boxed{d = 14\,m}$$ ✓

b) el tiempo que tarda en regresar desde este último punto hasta el de partida.



$v_B = 0\,m/seg$

traslación:

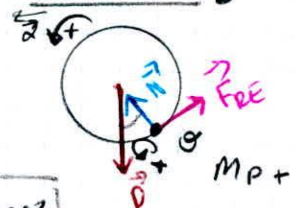


$P_x = mg \cdot sen(30)$

$$\boxed{P_x - F_{RE} = m \cdot a_{cm}}$$

$$\boxed{N = P_y = mg\cos(30)}$$

Rotación



$$\Sigma \vec{M} = I_O \vec{\alpha}$$

$a_{cm} = \alpha r$

$$P \cdot r\,sen(30) = \left(\frac{2}{5} m r^2 + m r^2\right)\alpha \longleftarrow \vec{M}_P = I_O \vec{\alpha}$$

$$\frac{\cancel{m} g \cancel{r}}{2} = \frac{7}{5} \cancel{m}\, \cancel{r^2} \frac{a_{cm}}{\cancel{r}} \rightarrow a_{cm} = \frac{5}{14} g \rightarrow \boxed{a_{cm} = 3{,}57\,m/seg^2}$$

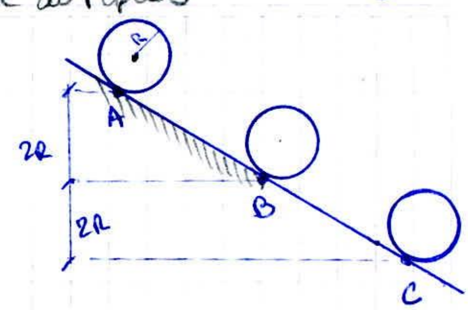
$$X_{(t)} = \frac{3{,}57}{2} \frac{m}{seg^2} t^2 \rightarrow X_{(t_f)} = 14\,m = 1{,}785 \frac{m}{seg^2} \cdot t_f^2 \rightarrow \boxed{t_f = 2{,}8\,seg}$$ ✓

$\omega = \frac{v}{r}$

Dinámica cuerpo rígido.

parte = parte del reposo

(37) Un cilindro de radio R parte de la posición A y rueda sin resbalar hacia abajo en un plano inclinado hasta B. De B a C la superficie es lisa. Los desniveles entre A y B y entre B y C son ambos iguales a 2R.



Hallar:

a) la velocidad del centro de masa del cilindro en B

En cada punto (de A a B) en que el cilindro toca la rampa, NO desliza → actúa F R. ESTÁTICA. $W_{FRE} = 0$ pues, al no desplazarse, $\Delta x = 0$

$\to W_{FRoc\,E}^{0} = \Delta E_m \longrightarrow E_{mA} = E_{mB}$ (entre A y B $E_{C\,TRASL}$ cte)

• $E_{mA} = E_{C\,ROTACIÓN\,A} + E_{PA} = \frac{1}{2} I_A \underbrace{\omega_A^2}_{0} + m g h_A = \boxed{m g h_A = E_{mA}}$ ① (parte del reposo)

• $E_{mB} = E_{C\,ROT.\,B} + E_{PB} = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 + m g h_B^{0} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2 + m r^2\right)\omega_B^2 = E_{mB}}$ ②

$\to$ ① = ②: $\cancel{m} g h_A = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cancel{m}\cancel{r^2}\right)\frac{v_{CMB}^2}{\cancel{R^2}} \to v_{CMB}^2 = \frac{4}{3}\, 10\frac{m}{seg^2}\, 2R \longrightarrow \boxed{v_{CMB} = 26{,}66\sqrt{R}\,\frac{m}{seg}}$ ✓

b) la velocidad angular del cilindro en B

$\omega_B = \frac{v_{CMB}}{R} = \frac{26{,}66\sqrt{R}\ m/seg}{R} = \boxed{\frac{26{,}66}{\sqrt{R}\,seg} = \omega_B}$ ✓

c) la velocidad del centro de masa y velocidad angular del cilindro en C

$\boxed{\text{Sup LISA} \to \omega\ \text{cte}}$

$0 = \Delta E_m$ (actúan solo fuerzas conservativas)

$E_{mB} = E_{mC}$

• $E_{mB} = E_{C\,ROTACIÓN\,B} + E_{C\,TRASL\,B} + E_{PB} =$

$= \boxed{\frac{1}{2} I_B \omega_B^2 + \frac{1}{2} m v_{CMB}^2 + m g h_B^{2R} = E_{mB}}$ Ⓐ

• $E_{mC} = E_{C\,ROT\,C} + E_{C\,TRASL\,C} + E_{PC} =$

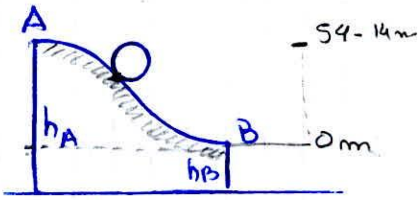
y $\omega_C = \omega_B$, $I_C = I_B$

$= \boxed{\frac{1}{2} I_C \omega_C^2 + \frac{1}{2} m v_{cmC}^2 + m g h_C^{0} = E_{mC}}$ Ⓑ

Ⓐ = Ⓑ: $\cancel{\frac{1}{2} I_B \omega_B^2} + \frac{1}{2}\cancel{m} v_{CMB}^2 + \cancel{m} g 2R = \cancel{\frac{1}{2} I_B \omega_B^2} + \frac{1}{2}\cancel{m} v_{cmC}^2$ ($I_C = I_B$)

$\to \frac{1}{2} v_{cmC}^2 = \frac{1}{2} v_{CMB}^2 + 2gR = R\frac{80}{3}\frac{1}{2}\frac{m^2}{seg^2} + 20\frac{m}{seg^2} R \Rightarrow \boxed{8{,}165\sqrt{R}\,\frac{m}{seg} = v_{cmC}}$ ✓

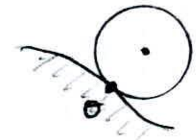
(38) Una esfera maciza parte del reposo desde el punto A de la figura y rueda sin resbalar hasta que sale disparada horizontalmente en el extremo B. Calcular a qué distancia horizontal de B la esfera llega a la base horizontal.



$h_A = 54m$ $h_B = 14m$

$\exists F_{R\ ESTÁTICO} \rightarrow$ En cada punto de contacto, la esfera no resbala $\rightarrow \Delta x$ del desplaz. es $0 \rightarrow W_{FRE} = 0J$

$W_{FRE} = \Delta Em \xrightarrow[0 \text{ (No resbala)}]{W_{FRE}=0} Em_A = Em_B$

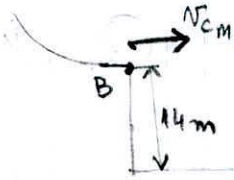


$Ec_{ROT\ A} + Ec_{TRASL\ A} + Ep_A = Ec_{ROT\ B} + Ec_{TRASL\ B} + Ep_B$

$\frac{1}{2} I_0 \underbrace{\omega_A^2}_{0 \text{ (parte del reposo)}} + mg\Delta h = \frac{1}{2} I_0 \omega_B^2 + mg\,0m$

$mg40m = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\omega_B^2$

$\cancel{m}\,g\,40m = \frac{7}{10}\cancel{m}\cancel{r^2} \cdot \frac{v_{CM_B}^2}{\cancel{r^2}} \rightarrow v_{CM_B}^2 = 10\frac{m}{seg^2}\,40m\,\frac{10}{7} \rightarrow \boxed{v_{CM_B} = 23,9\,m/seg}$



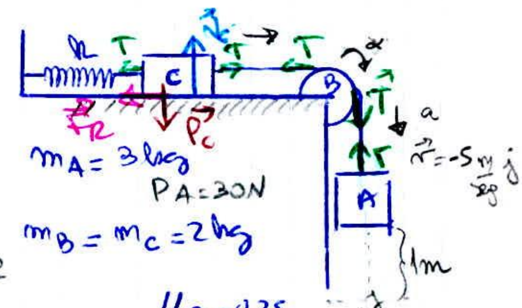
$y_{(t)} = -5\frac{m}{seg^2}t^2 \rightarrow y_{(tf)} = -14m = -5\frac{m}{seg^2}tf^2 \rightarrow \boxed{tf = 1,67\,seg}$

$x_{(t)} = 23,9\frac{m}{seg}t \rightarrow x_{(tf)} = 23,9\frac{m}{seg}\cdot tf = \boxed{39,9\,m = x_{(tf)}}$

---

(39) En el instante inicial el bloque A desciende con una velocidad de 5m/seg. El cilindro B es homogéneo y gira sin rozamiento y el cuerpo C presenta rozamiento sobre el plano horizontal. El resorte está estirado 0,5m y su constante elástica es de 50 N/m

¿Cuál es la velocidad de A después de descender 1m?



$m_A = 3kg$
$P_A = 30N$
$m_B = m_C = 2kg$

el resorte está estirado 0,5m ; cuando A desciende 1m $\rightarrow$ el resorte está estirado 1,5m

$\mu_C = 0,35$

$N = P_C = 20N$

$v_{0A} = -5m/seg \rightarrow v_{tg\,B} = 5m\,seg \rightarrow \omega_B = \frac{v}{r}$

$F_{RC} = N\mu_C = 20N \times 0,35$
$\boxed{F_{RC} = 7N}$

$W_{FROZ.} = \Delta Em$

$\vec{F_{RC}}\,|\Delta x|\cos 180 = \Delta Em_A + \Delta Em_B + \Delta Em_C$

$-7N \times 1m = (Ec_{Af} - Ec_{Ai} - Ep_{Ai}) + (Ec_{ROT\,Bf} - Ec_{ROT\,Bi}) + (Ec_{Cf} - Ec_{Ci}) + (Ee_f - Ee_i)$

$-7J = \frac{1}{2}\overset{3kg}{m_A}v_{Af}^2 - \frac{1}{2}m_A v_{A0}^2 - \overset{P_A\ 1m}{m_A g h_A} + \frac{1}{2}I_B \underbrace{\omega_{Bf}^2}_{(\frac{v}{r})^2} - \frac{1}{2}I_B\omega_{Bi}^2 + \frac{1}{2}m_C v_{Cf}^2 - \frac{1}{2}m_C v_{Ci}^2 + \frac{1}{2}k\,(x_f^2 - x_i^2)$

$\boxed{v_{Af} = v_{Btg\,f} = v_{Cf}} = v_f$

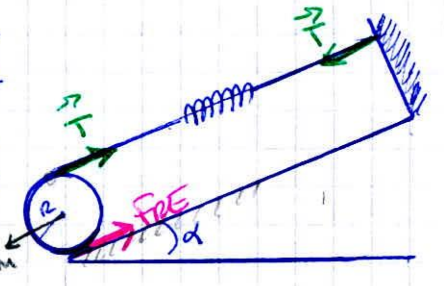
$-7J = 1,5kg\,(v_{Af}^2 - 25m^2/seg^2) - 30J + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overset{2kg}{m_B}\cancel{r^2}\right)\left(\frac{v_{Bf}^2}{\cancel{r^2}} - \frac{25m^2/seg^2}{\cancel{r^2}}\right) + 1kg\,(v_{Cf}^2 - 25m^2/seg^2) + 25\frac{N}{m}\cdot(1,5^2 - 0,5^2)$

$-7J = 1,5kg\,v_f^2 - 37,5J - 30J + 0,5kg\,v_f^2 - 12,5J + 1kg\,v_f^2 - 25J + 50J$

$\underbrace{-7J + 37,5J + 30J + 12,5J + 25J - 50J}_{48J} = v_f^2\,(1,5kg + 0,5kg + 1kg) \rightarrow v_f^2 = 16\frac{m^2}{seg^2} \rightarrow \boxed{v_f = 4\,m/seg}$

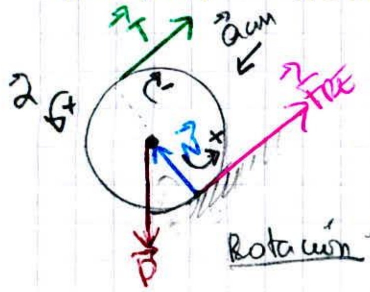
$48J = v_f^2\,(3kg)$

(40) El aro de radio R de la figura pesa 20N. Puede rodar sin resbalar sobre el plano inclinado. En el instante inicial la V_{cm} de la rueda es 1 m/seg hacia abajo y el resorte está extendido 0,2m. Si la constante elástica del resorte es 100N/m, hallar el alargamiento máximo del resorte.



$r = 0,5m$ $\qquad \alpha = 37°$ $\qquad I_r = mR^2$ $\qquad P = 20N$

$P = 20N \rightarrow m = 2kg$



Como tengo el dato de V_{cm}, hallo Mom. e inercia con respecto a CM

$P_x = sen(37)\,P = 12N$
$P_y = cos(37)\,P = 16N$

Rotación

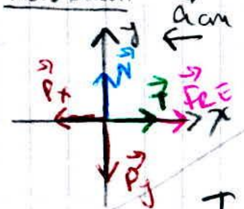
$\Sigma \vec{M}_{cm} = I_{cm}\,\vec{\alpha}$

$M_{FRE} - M_T = I_r\,\alpha$

$F_{RE} . R - T\,R = mR^2 \dfrac{a_{cm}}{R}$

$R(F_{RE} - T) = mR\,V_{cm} \Rightarrow F_{RE} - T = m\,a_{cm}$

Traslación



$\boxed{P_x - T - F_{RE} = m . a_{cm}}$

$P_x - \cancel{T} - F_{RE} = F_{RE} - \cancel{T}$

$P_x = 2F_{RE}$

$12N = 2F_{RE} \rightarrow \boxed{F_{RE} = 6N}$

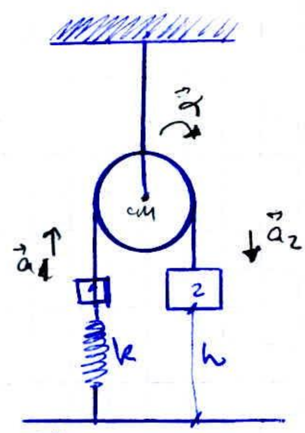
Fuerza elástica

$T_i = Fe_i = k\,\Delta x_i = 100\frac{N}{m} . 0,2\,m = 20N$

$\dfrac{12N - 20N - 6N}{2kg} = \boxed{a_{cm} = -7 m/seg^2}$ $\qquad a\,t = \Delta V \rightarrow t_f = \dfrac{0 - 1m/seg}{-7m/seg^2} \rightarrow \boxed{t = 0,14 seg}$

?

(41) En el sistema de la figura el resorte de constante elástica k y de masa despreciable se encuentra en un extremo fijo al piso y en el otro a la masa 1. La polea es cilíndrica y su masa es M. Los bloques suspendidos inicialmente se encuentran a la misma altura. Cuando el sistema se deja en libertad el resorte está estirado 1 m.



a) calcular el módulo de la velocidad del bloque 2 cuando llega al piso.

$m_1 = 8\,kg$
$m_2 = 15\,kg$
$k = 20\,N/m$
$m_p = 2\,kg$
$h = 4\,m$

Solo actúan fuerzas conservativas $\Rightarrow \Delta E_m = 0$

$$\boxed{E_{mi} = E_{mf}} \quad \text{①}$$

0 (pues parte del reposo)

$$\underbrace{E_{ci} + E_{crot\,i}}_{0} + E_{pi} + E_{ei} = E_{ef} + E_{pf} + E_{crotf} + E_{cf}$$

- $E_{pi} = m_1 g h + m_2 g h = (m_1 + m_2)\, g h = 23\,kg\, 10\frac{m}{seg^2}.4m = \boxed{920\,J = E_{pi}}$
- $E_{ei} = \frac{1}{2} k\, \Delta x^2 = \frac{1}{2}\, 20\,\frac{N}{m}.(1m)^2 = \boxed{10\,J = E_{ei}}$
- $E_{ef} = \frac{1}{2} k\, \Delta x^2 = 10\,\frac{N}{m}(4m + 1m)^2 = 10\,\frac{N}{m}\, 25m^2 = \boxed{250\,J = E_{ef}}$
- $E_{pf} = m_1 g\, 2h + m_2 g\, \overset{0}{h_f} = 80N \times 2 \times 4m = \boxed{640\,J = E_{pf}}$
- $E_{crot\,f} = \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega_f^2 = \frac{1}{2}\, \frac{1}{2} \overset{2kg}{m_p}\, \cancel{r^2}\, \frac{v_f^2}{\cancel{r^2}} = \boxed{0{,}5\,kg\, v_f^2 = E_{crot\,f}}$
- $E_{cf} = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 v_f^2 = v_f^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) = \boxed{11{,}5\,kg\, v_f^2 = E_{cf}}$

① $\quad 920\,J + 10\,J = 250\,J + 640\,J + 0{,}5\,kg\, v_f^2 + 11{,}5\,kg\, v_f^2$

$$40\,J = 12\,kg\, v_f^2 \rightarrow v_f^2 = 3{,}335\ m^2/seg^2 \longrightarrow \boxed{v_f = 1{,}82\ m/seg}$$

b) ¿cuál sería el trabajo realizado por el rozamiento en el eje de la polea si se detiene justo al llegar al piso?

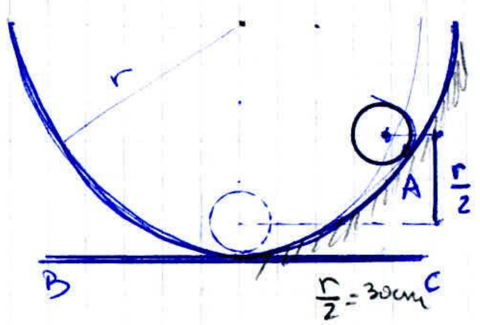
$$W_{Froz} = \Delta E_m = \Delta E_e + \underbrace{\Delta E_c}_{0} + \Delta E_p$$

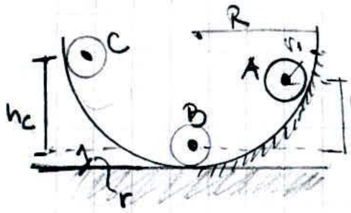
pues parte del reposo y se detiene cuando desc. 4m

$$W_{Froz} = (E_{ef} - E_{ei}) + (E_{pf} - E_{pi}) =$$
$$= (250\,J - 10\,J) + (640\,J - 920\,J) = -40\,J$$

$$\boxed{W_{Froz} = -40\,J}$$

(42) Un cilindro homogéneo de radio 5cm puede moverse en el interior de una sup. cilíndrica de radio 60 cm.
La superficie de la mitad derecha presenta rozamiento de modo que el cilindro rueda sin resbalar. La mitad izquierda está exenta de rozamiento.
Inicialmente el centro de masa del cilindro se encuentra en reposo en el punto A. Hallar la altura respecto del plano BC que alcanza el cilindro cuando asciende sobre la mitad izquierda





$r_1 = 0{,}05\ m$

$R = 0{,}6\ m$

$\frac{R}{2} = 0{,}3\ m \rightarrow h_A = 0{,}3\ m$
$h_B = 0\ m$

$\boxed{\text{de A a B}}$: actúa $F_{ROZ\ EST} \rightarrow$ en cada punto de contacto no desliza $\rightarrow W_{FRE} = 0\ J$

$W_{FRE} = \Delta Em = \Delta E_{C\ ROT} + \Delta E_p$

$0 \rightarrow$ parte del reposo

$0\ J = (E_{CROT\ F} - E_{CROT\ i}) + (E_{pf} - E_{pi})$

$\rightarrow E_{C\ ROT\ F} = E_{pi} \longrightarrow \frac{1}{2} I_{sup}\, \omega_B^2 = m.g\, h_A$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\frac{v_B^2}{R^2} = m g h_A$

$\frac{3}{4}\cancel{m}\cancel{R^2}\frac{v_B^2}{\cancel{R^2}} = \cancel{m} g h_A \rightarrow v_B^2 = \frac{4}{3} g \overset{0{,}3\,m}{h_A} = 4\frac{m^2}{seg^2} \rightarrow \boxed{v_B = 2\frac{m}{seg}}$

$\boxed{\text{de B a C}}$: No hay $F_{ROZ} \rightarrow$ no rota (resbala) $\rightarrow \nexists$ fuerzas NO conserv.

$0\ J = \Delta Em \longrightarrow Em_B = Em_C \rightarrow Ec_B = Ep_C$ ($\nexists\ Ep_C$ pues se detiene en C)

$\frac{1}{2}\cancel{m}\, v_B^2 = \cancel{m} g h_C$

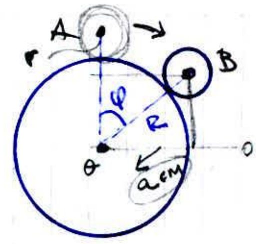
$\frac{v_B^2}{2g} = h_C = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2}}\frac{m^2}{\cancel{seg^2}} \cdot \frac{\cancel{seg^2}}{10\,m} = 0{,}2\ m$

$h_C = 0{,}2\,m + r = 0{,}2\,m + 0{,}05\,m = 0{,}25\,m$

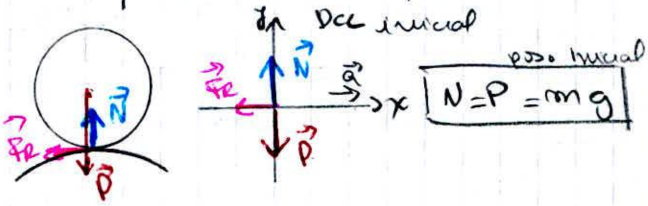
$\boxed{h_{total} = 0{,}25\,m}$

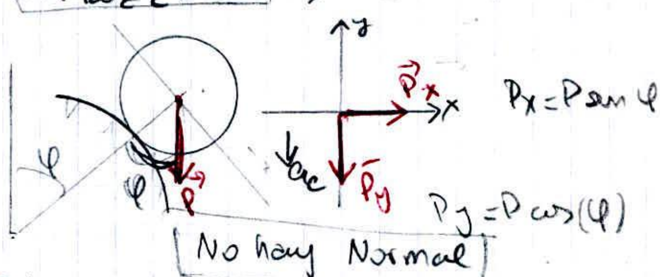
$$\boxed{a_c = \omega^2 R}$$

(43) Una esfera homogénea parte del reposo desde un punto de la generatriz superior de un cilindro y desciende rodando sin resbalar sobre la superficie cilíndrica. Hallar el ángulo φ que forma el radio que pasa por el punto en que la esfera abandona la sup. cilíndrica.



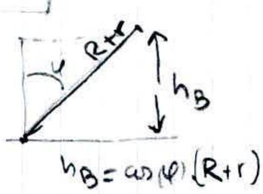
Hay roz. estático → No resbala → $\boxed{W_{FROZ\,E} = 0\,J}$ → $0 = \Delta Em$





$W_{FROZ\,E} = 0 \rightarrow \Delta Em = 0$

$$P_y = a_c\, m$$
$$\boxed{\cancel{m} g \cos\varphi = \cancel{m}\, a_c} \quad (1)$$



$$Em_A = Em_B \rightarrow E_{PA} = E_{PB} + E_{ROT\,B}$$

$$mg\,h_A = mg\,h_B + \frac{1}{2} I_\theta\, \omega_F^2$$

$$mg(R+r) = mg(R+r)\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m (R+r)^2 + m(R+r)^2\right)\omega_F^2$$

$$\cancel{m}g\cancel{(R+r)} = \cancel{m}g\cancel{(R+r)}\cos\varphi + \frac{7}{10}\cancel{m}(R+r)^{\cancel{2}}\omega_F^2$$

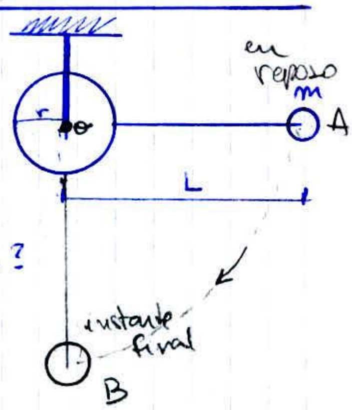
$$g = \underbrace{g\cos\varphi}_{(1)\, a_c} + \frac{7}{10}\underbrace{(R+r)\,\omega_F^2}_{a_c} = \frac{17}{10} a_c$$

$$\boxed{a_c = \frac{10}{17} g} \xrightarrow{(1)} \cancel{g}\cos\varphi = a_c = \frac{10}{17}\cancel{g}$$

$$\cos\varphi = \frac{10}{17} \longrightarrow \boxed{\varphi = 53{,}97^\circ}$$

---

(44) La masa puntual m de la figura, está fija rígidamente al disco por medio de la barra de peso despreciable. La distancia entre el disco y la masa m es L. Si el momento de inercia del disco es I_0 ¿Cuál será el módulo de la velocidad lineal con que se moverá la masa m cuando el sistema se libera del reposo desde esa posición y el disco gira de manera que m esté directamente debajo del eje de rotación?



∄ fuerzas no conservativas → $0 = \Delta Em$

$v_0 = 0\,m/seg$

$$Em_A = Em_B$$

$$E_{PA} = E_{C\,rot\,disco} + E_{C\,trasl\,masa}$$

$$mgL = \frac{1}{2} I_0\, \omega_B^2 + \frac{1}{2} m\, v_B^2$$

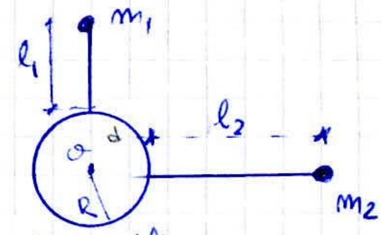
$$mgL = \frac{1}{2} I_0 \frac{v_B^2}{L^2} + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$mgL = \frac{1}{2} v_B^2 \left(\frac{I_0}{L^2} + m\right)$$

$$v_B^2 = \frac{2mgL}{\frac{I_0}{L^2} + m} = \frac{2mgL}{\frac{I_0 + L^2 m}{L^2}} = \frac{2mgL^3}{I_0 + L^2 m} \rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{\frac{2mgL^3}{I_0 + L^2 m}}}$$

Dinámica
Cuerpo rígido

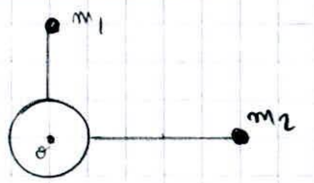
(45) Un disco homogéneo de radio 50 cm y masa 19 kg puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo horizontal.
Lleva unidos a él, por medio de barras de masas despreciables, dos cuerpos puntuales de masas m_1 y m_2. Si se deja en libertad al sistema a partir del reposo, calcular el módulo de velocidad del cuerpo puntual de masa m_2 cuando pasa por su posición más baja.



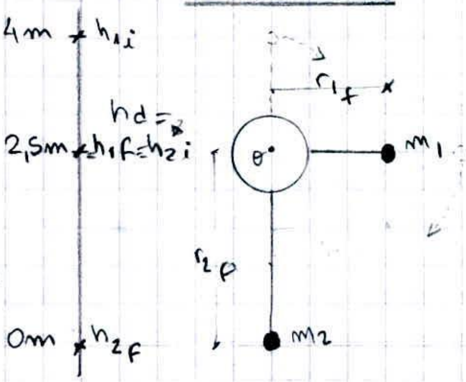
$m_1 = 1 kg$
$m_2 = 2m_1 = 2 kg$
$l_1 = 1 m$
$l_2 = 2 m$
$m_d = 19 kg$
$r_d = 0{,}5\ m = R$

$\nexists$ fuerzas no conservativas $\therefore$ $\Delta E_m = 0\ J$

Posición inicial (en reposo)



Posición final



$E_{mf} = E_{p_{1f}} + E_{p_{2f}} + E_{p_{df}} + E_{c_{ROT}}$

$E_{mi} = E_{p_i} = E_{p_{1i}} + E_{p_{2i}} + E_{p_d}$

$\omega = \frac{v}{R}$

- $E_{mi} = m_1 g h_{1i} + m_2 g h_{2i} + m_d g h_d = g(1 kg\ 4m + 2 kg\ 2{,}5m + 19 kg\ 2{,}5m) = \boxed{565 J = E_{mi}}$
- $E_{mf} = m_1 g h_{1f} + m_2 g \overset{0}{h_{2f}} + m_d g h_d + \frac{1}{2} I_o \omega_f^2 =$

$= g(1 kg\ 2{,}5m + 19 kg\ 2{,}5m) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_d R^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\omega_f^2 =$

$= 500\ J + \frac{1}{2}\left(\frac{19}{2} kg\ 0{,}5^2 m^2 + 1 kg\ 1{,}5^2 m^2 + 2 kg\ 2{,}5^2 m^2\right)\omega_f^2 =$

$= \boxed{500\ J + \frac{1}{2}\ 17{,}125\ kg\ m^2\ \omega_f^2 = E_{mf}}$

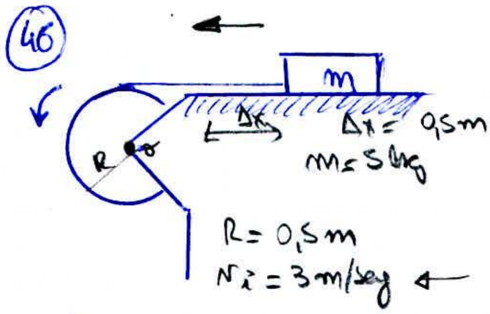
$\rightarrow E_{mi} = E_{mf} \rightarrow 565\ J = 500\ J + 8{,}5625\ kg\ m^2\ \omega_f^2$

$65\ J = 8{,}5625\ kg\ m^2\ \omega_f^2 \rightarrow \omega_f^2 = 7{,}5912/seg^2$

$\boxed{\omega_f = 2{,}7552/seg}$

$v_{2f} = \omega_f \cdot r_2 = 2{,}7552/seg \cdot 2{,}5m = \boxed{6{,}888\ m/seg = v_{2f}}$ ✓

46



La polea mostrada en la figura tiene un momento de inercia de 2 kgm^2
Inicialmente se hace girar la polea de radio 0,5m en el sentido indicado de manera tal que el bloque de masa 5kg es empujado a lo largo de la mesa a una velocidad de 3m/seg.
Si se deja libre al sistema, éste llega al reposo después que el bloque se desplaza 50cm.

· Hallar la intensidad de la fuerza de rozamiento sobre el bloque.

$$W_{F\,ROCE} = \Delta E_m = \Delta E_{c\,ROT} + \overbrace{\Delta E_p}^{0J\ \to \text{ no hay cambio de alturas}} + \Delta E_c = E_{c\,ROT\,i} + E_{c\,i}$$

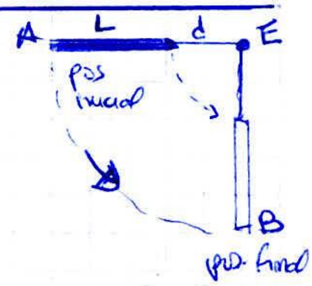
(final es cero, no rota) — final es cero porque se detiene

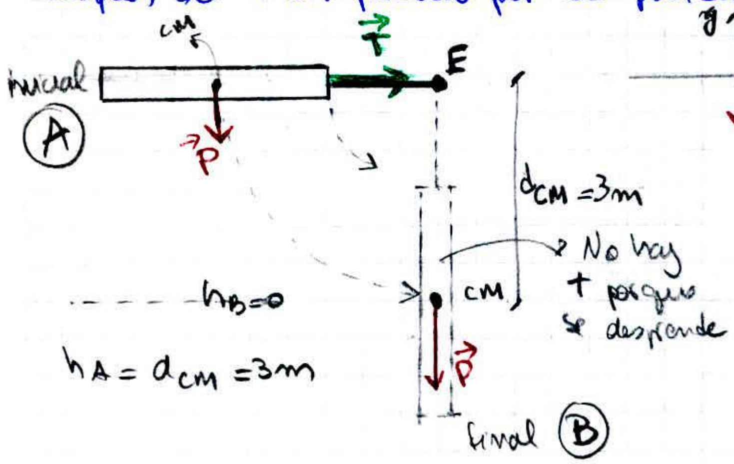
$$|F_{ROZ}|\,\Delta x \cos 180 = \frac{1}{2} I_o \omega_i^2 + \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2}\, 2kg\,m^2 \cdot \frac{v_i^2}{r^2} + \frac{1}{2}\, 5kg\, v_i^2$$

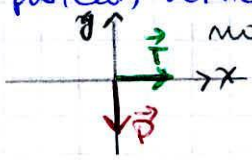
$$-F_{ROZ} \cdot 0{,}5m = 1kgm^2 \cdot 3^2 \frac{m^2}{seg^2} \cdot \frac{1}{0{,}5^2 m^2} + 2{,}5kg\; 3^2 \frac{m^2}{seg^2} = 58{,}5J$$

$$\to F_{ROZ} = \frac{58{,}5J}{0{,}5m} = \boxed{117N = F_{ROZ}}$$

47 Una barra homogénea de long. 3m está vinculada a otra de masa despreciable y de long. 1,5m y puede girar sin rozamiento alrededor del eje fijo E.
Se libera en posición horizontal y, al llegar a la posición vertical se desprende del eje E.
Hallar la velocidad angular de la barra un segundo después de haber pasado por su posición vertical.







no se desplaza en x, a=0

T → 0 porque no se mueve hacia el costado

La única FNC es T, y tiende a 0

$\therefore W_T = 0 \to 0 = \Delta E_m$

$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$E_{pA} = E_{c\,rot\,B}$$

$$mg\,h_A = \frac{1}{2} I_E\, \omega_B^2$$

$$\cancel{m} g\, h_A = \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{m}L^2}{12} + \cancel{m} d_{CM}^2\right)\omega_B^2$$

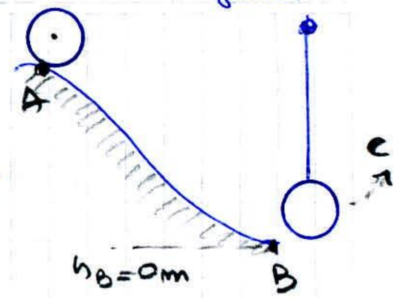
$$2g\,h_A = \frac{L^2 + 12 d_{CM}^2}{12}\,\omega_B^2$$

$$\frac{24\, g\, \overset{3m}{h_A}}{\underset{3}{L^2} + 12\, \underset{3}{d_{CM}^2}} = \omega_B^2 = 6{,}1538/seg^2$$

$$\boxed{\omega_B = 2{,}4807/seg}$$

Después de B, la barra se desprende de E por lo que ω se mantiene
→ $\omega_B = \omega$ 1 segundo después de desprenderse

48) Una esfera homogénea de radio cualquiera parte del reposo en A y puede rodar sin resbalar sobre la superficie AB. En este punto la velocidad de su centro de masa es 10 m/seg. y choca en forma perfectamente elástica con una esfera idéntica suspendida como un péndulo sostenido por una barra rígida con masa despreciable y que se halla en reposo. Calcular:



$h_B = 0m$

$v_B = 10 \, m/seg$

a) la altura inicial de la primera esfera

Como en cada punto de contacto (de la esfera con la sup.) no hay desplazamiento $\rightarrow \exists$ F ESTÁTICA $\rightarrow$ No resbala $\rightarrow W_{F ROZ E} = 0 \, J$.

$$\rightarrow 0 = \Delta Em \rightarrow Em_A = Em_B$$

$$Ep_A = Ec_{ROT.B}$$

$$\cancel{m} \cdot g \, h_A = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\cancel{m} r^2 + \cancel{m} r^2\right)\omega_B^2 = \frac{7}{10}\cancel{r^2} \cdot \frac{v_B^2}{\cancel{r^2}}$$

$$h_A = \frac{7 v_B^2}{10 g} = \frac{7 \cdot 10^2 \, m^2/seg^2}{10 \times 10 \, m/seg^2} = \boxed{7m = h_A}$$ ✓

b) la altura alcanzada por la segunda esfera $\qquad m_1 = m_2 = m$

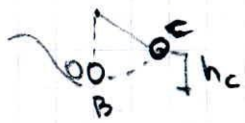
choque perfectamente elástico $\rightarrow \quad m_1 v_{1a} + m_2 \overbrace{v_{2a}}^{0\, m/seg} = m_1 v_{1d} + m_2 v_{2d}$

$$1 = \frac{-(v_{2d} - v_{1d})}{\underbrace{v_{2a}}_{0\, m/seg} - v_{1a}} \rightarrow -v_{1a} = -(v_{2d} - v_{1d}) \qquad \cancel{m} \cdot 10\frac{m}{seg} = \cancel{m}(v_{1d} + v_{2d})$$

$$\boxed{10 \, m/seg = v_{2d} - v_{1d}} \; ② \qquad \boxed{10 \, m/seg = v_{1d} + v_{2d}} \; ①$$

① y ② $\quad v_{2d} - v_{1d} = v_{1d} + v_{2d} \rightarrow 0 = 2 v_{1d} \rightarrow \boxed{v_{1d} = 0} \rightarrow \boxed{v_{2d} = 10 \, m/seg}$

Después de chocar $\rightarrow \Delta Em = 0 \rightarrow Em_B = Em_C$

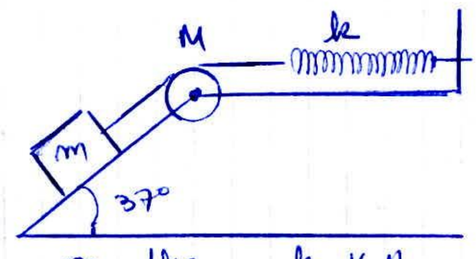


$$Ec_B = Ep_C$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} \, v_{2d}^2 = \cancel{m} \, g \, h_c$$

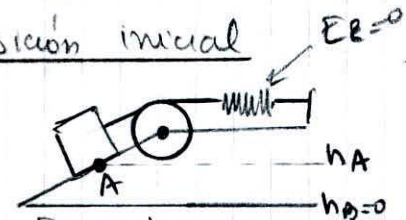
$$\frac{1}{2} \, 10^2 \frac{m^2}{seg^2} \cdot \frac{1}{g} = \boxed{h_c = 5m}$$ ✓

(49) En el sist. de la figura, el bloque de masa $m_1 = 1\,kg$ está inicialmente en reposo sobre un plano inclinado 37º respecto de la horizontal. Entre el bloque y el plano no existe rozamiento.
Dicho bloque está unido al extremo de un resorte no deformado mediante una cuerda inextensible de masa despreciable.
El hilo pasa por una polea cilíndrica de masa $M = 2\,kg$. Se dejó al sistema en libertad y el bloque desciende sobre el plano inclinado.
Hallar la velocidad del mismo cuando se ha recorrido 0,5 m sobre dicho plano.



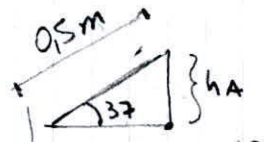
$m = 1\,kg$ $\quad k = 16\,\frac{N}{m}$
$M = 2\,kg.$

Posición inicial



Ec=0 J pues parte del reposo

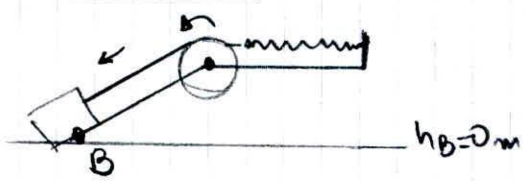
$$E_{mA} = E_{pA} = mg \cdot h_A = $$
$$= 1\,kg\, 10\,\frac{m}{seg^2}\, 0{,}3\,m$$
$$\boxed{E_{mA} = 3\,J}$$



$h_A = 0{,}5\,m\, \text{sen}\, 37$
$h_A = 0{,}3\,m$

$\Delta x = 0{,}5\,m$

Posición final



$$E_{mB} = Ee_B + E_{cB} + E_{c\,ROT.\,B} =$$
$$= \frac{1}{2} k\,(\Delta x)^2 + \frac{1}{2} m\, v_B^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega_B^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\, 16\,\frac{N}{m} \cdot (0{,}5\,m)^2 + \frac{1}{2} 1\,kg\, v_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \overset{2kg}{M}\, \cancel{R^2}\right) \frac{v_B^2}{\cancel{R^2}} =$$
$$= 2\,J + 0{,}5\,kg\, v_B^2 + 0{,}5\,kg\, v_B^2 =$$
$$= \boxed{2\,J + 1\,kg\, v_B^2 = E_{mB}}$$

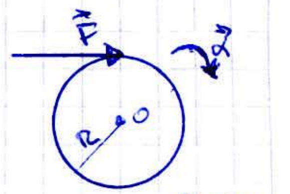
$$\overbrace{\Sigma W_{FNC}}^{0 \text{ pues } \Sigma W_{Tensión} = 0} = \Delta E_m = 0 \rightarrow E_{mA} = E_{mB}$$

$$3\,J = 2\,J + 1\,kg\, v_B^2 \rightarrow \frac{1\,J}{1\,kg} = v_B^2 \rightarrow \boxed{v_B = 1\,m/seg}$$ ✓

Mecánica

Cuerpo rígido

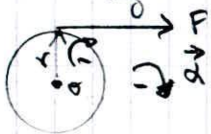
(50) Un disco de radio 20 cm puede girar alrededor de O apoyado sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Inicialmente está girando en sentido de las agujas del reloj con una velocidad angular de $20\ seg^{-1}$. Se le aplica una fuerza de 30 N tangente al borde del disco como indica la figura durante 1 segundo. Como resultado se observa que el disco continúa girando con una velocidad angular de $100\ seg^{-1}$. Hallar:



$R = 0{,}2\,m$

a) el impulso del momento de la fuerza

$\omega_0 = 20/seg \xrightarrow{\text{después de } F} \omega_f = 100/seg \qquad t = 1\,seg \qquad F = 30\,N$



$\vec{M}_F = \vec{F} \times \vec{r} \rightarrow M_F = F \cdot r \cdot sen\,90 = 30\,N \cdot 0{,}2\,m = 6\,Nm$

$\boxed{M_F = 6\,Nm}$

$I_{M_F;\Delta t} = M_F\,\Delta t = 6\,Nm \cdot 1\,seg = \boxed{6\,Nm\,seg = I_{M_F,1seg}}$

b) El momento de inercia del disco.

$\Sigma \vec{I}_{M_F;\Delta t} = \Delta \vec{L}$

$M_F \cdot \Delta t = I_{disco,o}\,\omega f - I_{disco,o}\,\omega i$

$6\,Nms = I_{disco\,en\,o}\,(\omega f - \omega i)$

$6\,Nms = I_{disco\,en\,o}\,(100/seg - 20/seg)$

$\frac{6\,Nms}{80/seg} = I_{disco\,en\,o} \rightarrow \boxed{I_{disco\,en\,o} = 0{,}075\,kg\,m^2}$

51) Un hombre está parado verticalmente sobre el eje de una plataforma que gira sin rozamiento alrededor de un eje vertical con frecuencia 1 rpm. Sus brazos están estirados y sostiene una pesa en cada mano. En esa posición el momento de inercia total del conjunto con respecto al eje es 6 kgm².
Al acercar los pesos al cuerpo el momento de inercia disminuye hasta 4 kgm²

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad angular de la plataforma en la última posición?

$$I_{o\ inicial} = 6\,kgm^2 \; . \quad f_o = 1\,rpm = \frac{1}{60\,seg} \quad (1\ vuelta/1\ minuto) \rightarrow \omega_o = 2\pi f_o = 2\pi \cdot \frac{1}{60\,seg} = \frac{0{,}1047}{seg}$$

No hay fuerzas externas $\rightarrow \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow M_{F\,ext} = 0 \rightarrow$ Se conserva el momento angular. $\vec{L}_o = \vec{L}_f$

$$L_o = L_f \rightarrow I_o \omega_o = I_f \omega_f$$

$$6\,kgm^2 \frac{\pi}{30\,seg} = 4\,kgm^2 \cdot \omega_f \rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{\pi}{20\,seg}}$$

b) Calcule el trabajo de todas las fuerzas involucradas en este proceso

$$\Sigma W_F = \Delta E_c$$

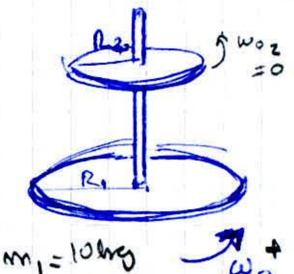
$$W_F = E_{cf} - E_{co}$$

$$W_F = E_{c\,rot\,f} - E_{c\,rot\,o}$$

$$W_F = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_o \omega_o^2 = \frac{1}{2} 4\,kgm^2 \left(\frac{\pi}{20\,seg}\right)^2 - \frac{1}{2} 6\,kgm^2 \left(\frac{\pi}{30\,seg}\right)^2 = 0{,}01645$$

$$\boxed{W_F = 0{,}01645\,J}$$

(52) Un disco homogéneo de radio 50cm y masa 10kg. está girando en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por su centro a razón de 300 rpm. Un segundo disco de radio 30cm y masa 8kg, inicialmente en reposo, está situado por encima del primero y montado en el mismo eje, se deja caer sobre el primer disco de modo que quedan unidos. Hallar:



$m_1 = 10kg$
$m_2 = 8kg$
$r_1 = 0{,}5m$
$r_2 = 0{,}3m$

a) La velocidad angular del conjunto formado por los discos

$$f_{o1} = 300\,rpm = \frac{\cancel{300}^{5}\text{ vueltas}}{\cancel{60}\,seg} = \frac{5}{seg} \rightarrow w_{o1} = 2\pi f_o = 2\pi \frac{5}{seg} = \boxed{\frac{10\pi}{seg} = w_{o1}}$$

$w_{o2} = 0$ (en reposo)

choque plástico $\rightarrow w_{f1} = w_{f2}$ w_f

$$\Sigma F_{ext} = 0N \rightarrow \Sigma M_{Fext} = 0 \rightarrow \vec{L}_o = \vec{L}_f$$

$$I_{2o}\overset{0}{w_{o2}} + I_{1o} w_{o1} = (I_{1f} + I_{2f})\, w_f$$

$$\frac{m_1 r_1^2}{\cancel{2}} w_{o1} = \left(\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{\cancel{2}}\right) w_f$$

$$\frac{10kg\, 0{,}5^2 m^2}{10kg\, 0{,}5^2 m^2 + 8kg\, 0{,}3^2 m^2} \cdot \frac{10\pi}{seg} = \boxed{w_f = 24{,}39 /seg}$$

b) La pérdida de energía cinética como consecuencia del choque entre los dos discos

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

• $E_{cf} = \frac{1}{2} I_{sistema}\, w_f^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) w_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2\right) w_f^2 =$

$= \frac{1}{4}(10kg\, 0{,}5^2 m^2 + 8kg\, 0{,}3^2 m^2)(24{,}39/seg)^2 = \boxed{478{,}87 J = E_{cf}}$

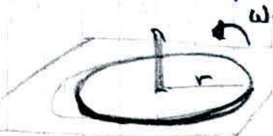
• $E_{ci} = \frac{1}{2} I_1 w_{o1}^2 + \frac{1}{2} I_2 \overset{0}{w_{o2}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1 r_1^2\right) w_{o1}^2 = \frac{1}{4}\, 10kg\, 0{,}5^2 m^2 \cdot \left(\frac{10\pi}{seg}\right)^2 = \boxed{616{,}85 J = E_{co}}$

$$\Delta E_c = 478{,}87J - 616{,}85J = \boxed{-137{,}98J = \Delta E_c}$$

$a = \frac{\Delta r}{t} \rightarrow \alpha = \frac{\Delta \omega}{t}$

(53) Un disco homogéneo de radio 30 cm está girando alrededor de su eje vertical con velocidad angular de 4/seg. En determinado momento se pone en contacto con una superficie horizontal. El coeficiente de roce cinético entre el disco y la superficie horizontal es 0,1.
Calcular:

a) el tiempo que debe transcurrir hasta el instante en que se detiene..



$r = 0,3\,m$ $\quad \mu_c = 0,1$ $\quad \sum \vec{M} = I\vec{\alpha}$ $\quad \exists F_{ROCE}$ (ext)

$\omega_0 = 4/seg$

$-F_{ROCE}\, r = \frac{1}{2} m r^2 . \alpha$

$\omega_f = 0$ (se detiene)

$-\mu_c \cancel{m} g = \frac{1}{2} \cancel{m} r \alpha \rightarrow \alpha = -\frac{\mu_c . g 2}{r} = \boxed{-\frac{20}{3 seg^2} = \alpha}$

$\alpha = \frac{\Delta \omega}{t} \rightarrow t = \frac{\Delta \omega}{\alpha} = \frac{-4/seg}{-20/3 seg^2} = \boxed{0,6 seg = t}$

b) El número de vueltas que efectúa el disco en el tiempo calculado en a)

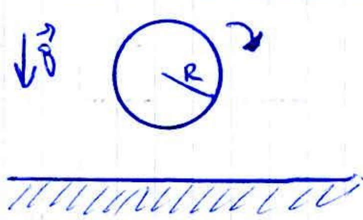
recorrido $= \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \longrightarrow$ recorrido total: $\gamma \rightarrow \gamma = \frac{4}{seg} . t_f - \frac{10}{3 s^2} t_f^2$

$\gamma = \frac{4}{\cancel{seg}} 0,6 \cancel{seg} - \frac{10}{3 seg^2} 0,6^2 \cancel{seg^2} = 1,2$

$\gamma = 1,2$ radianes $\rightarrow n = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{1,2}{2\pi} = 0,19$

---

(54) Un disco homogéneo de radio 5 dm y masa 5 kg está girando en un plano vertical alrededor de su eje con velocidad angular 6/seg. En determinado momento se pone en contacto con una superficie horizontal. Sabiendo que el coeficiente de roce cinético entre el disco y la sup. horizontal es 0,2.
Calcular:



$\mu_c = 0,2$ $\quad r = 0,5\,m$ $\quad m = 5\,kg$ $\quad \omega_0 = 6/seg$

a) el tiempo que transcurrirá hasta el instante en que rueda sin resbalar

?

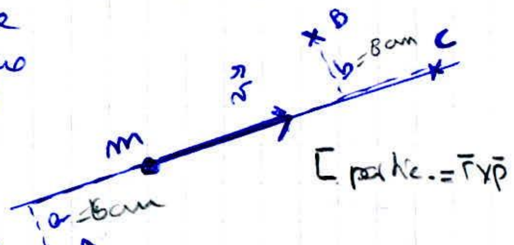
$v_{cm} = \omega R = \frac{6}{seg} . 0,5\,m$ $\quad$ 3 m/seg

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{6}{seg}$

$v \quad \omega = \frac{6}{seg}$

(55) a) Calcular el momento de la cantidad de movimiento de una partícula de masa $m = 200gr$ que se desplaza en trayectoria rectilínea en un plano horizontal con velocidad $v = 40cm/seg$. respecto de los puntos A, B y C de la figura. ?

(?)



L partic. $= \bar{r} \times \bar{p}$

v^2

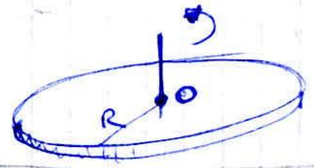
$a = 6cm \quad b = 8cm \quad m = 200gr \quad v = 4m/seg$

$\vec{L}_A = \vec{r}_A \times \vec{p}_A \rightarrow L_A = a \cdot m \cdot v = 0{,}06m \cdot 0{,}2kg \cdot 4m/seg = \boxed{0{,}048\ kgm^2/seg = L_A}$

$\vec{L}_B = \vec{r}_B \times \vec{p}_B \rightarrow L_B = b \cdot m \cdot v = 0{,}08m\ 0{,}2kg\ 4m/seg = \boxed{0{,}064\ kgm^2/seg = L_B}$

$\vec{L}_C = \vec{r}_C \times \vec{p}_C \rightarrow L_C = 0m\ m\, v = \boxed{0 = L_C}$

b) Un disco de masa 2kg. y radio 20 cm gira alrededor de la vertical que pasa por O dando 50 vueltas por segundo en el sentido indicado en la figura.
Hallar el momento de la cantidad de movimiento del disco respecto de O



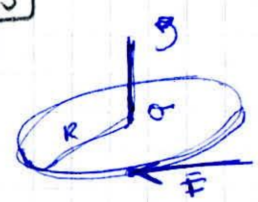
$\boxed{\vec{L}\ \text{cuerpo rígido} = I_{bar\,rc} \cdot \omega}$

$m = 2kg \quad r = 0{,}2m \quad f = \frac{50\ \text{vueltas}}{seg}$

$\omega = 2\pi f = \boxed{\frac{100\pi}{seg} = \omega} \quad \vec{L}_O = I_O\, \omega = \frac{1}{2} m r^2 \omega = \frac{1}{2} 2kg\ 0{,}2^2 m^2 \frac{100\pi}{seg} = 4\pi\ kgm^2/seg$

$\boxed{\vec{L}_O = 12{,}56\ kgm^2/seg}$ /

c) Hallar el valor de la fuerza F perpendicular a R en el mismo plano y de módulo constante, necesaria ~~para~~ a aplicar en el borde del disco de la parte b) para frenarlo en 10 seg



$t_0 = 0\,seg \qquad t_F = 10\,seg$

por b): $\omega_0 = \frac{100\pi}{seg} \qquad \omega_F = 0/seg$ (se detiene) $\rightarrow \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \boxed{\frac{-10\pi}{seg^2} = \alpha}$

$\exists F_{ext} \qquad \Sigma \vec{M}_O = I_O\, \vec{\alpha}$

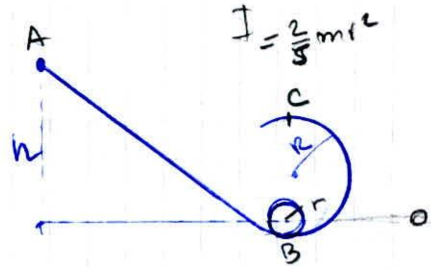
$F \cdot \cancel{r} = \frac{1}{2} m r^{\cancel{2}} |\alpha|$

$F = \frac{1}{2} 2kg \cdot 0{,}2m \cdot \left(\frac{10\pi}{seg^2}\right) = 2\pi\ N$

$\boxed{F = 6{,}28\ N}$ /

(56) Una bola homogénea de radio r rueda sin deslizar a lo largo de una vía que forma un bucle. Parte del reposo a la altura h.
Si la bola no abandona la vía en la parte superior del bucle y R es el radio del bucle:

esfera $I = \frac{2}{5} m r^2$

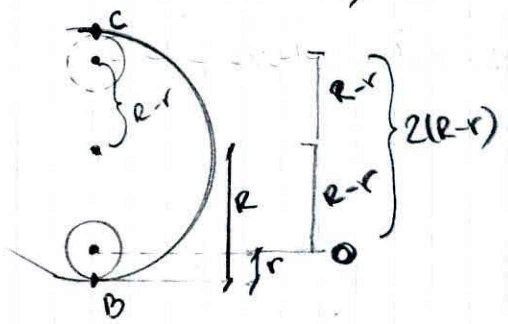


a) ¿cuál debe ser el valor mínimo de h?

$v_0 = 0\, m/seg$ $\quad \omega_0 = 0/seg$. Rueda sin deslizar $\rightarrow$ no se desplaza $\rightarrow W_{FR} = 0\, J$

R = radio bucle
r = radio esfera

$W_{FR} = 0\, J \rightarrow \Delta Em = 0 \rightarrow \underset{\text{solo pot}}{Em_i} = Em_f$



$$mgh = mg.2(R-r) + \frac{1}{2} I_c \omega_f^2$$

$$mgh = mg\,2(R-r) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\omega_f^2$$

$$\cancel{m}gh = \cancel{m}g\,2(R-r) + \frac{7}{10}\cancel{m}r^2\omega f^2$$

$$\boxed{gh = 2g(R-r) + \frac{7}{10}(v_{cm_f})^2} \quad ①$$

$v_{cmf} \rightarrow$ en el punto c. En C, la Normal tiende a cero

$$\hookrightarrow \Sigma F_{radiales} = m.a_{cm} = m . \frac{v_{cm}^2}{R-r}$$

$$P = \frac{m(v_{cm\ minima})^2}{R-r} \quad \rightarrow \text{en C la vel. es mínima (es la final)}$$

$$\cancel{m}.g = \frac{\cancel{m}(v_{cm\ min})^2}{R-r} \rightarrow \boxed{(v_{cm\,min})^2 = g(R-r)} \quad ②$$

$$① \text{ y } ② : \cancel{g}h = 2\cancel{g}(R-r) + \frac{7}{10}\cancel{g}(R-r) \rightarrow \boxed{h = (R-r)\,2{,}7}$$ ✓

b) ¿Cuál es la altura mínima si la bola se desliza a lo largo de la vía sin rozamiento?

Si no hay roce entonces la bola NO RUEDA $\rightarrow \alpha = 0$
Solo se traslada $\rightarrow Ec_{rotación} = 0\, J$

$\Delta E m = 0\, J \rightarrow Em_A = Em_C$

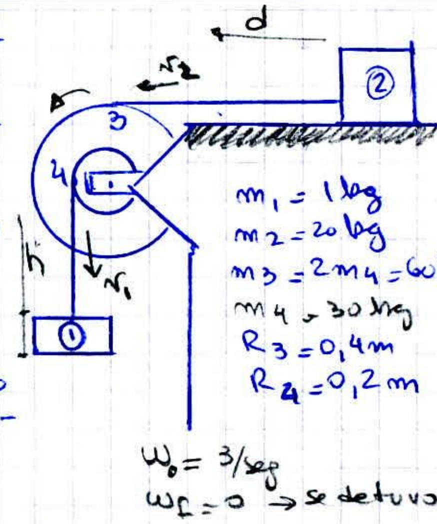
$$Ep_A = Ep_C + Ec_{trasl.\,C}$$

$$\cancel{m}gh = \cancel{m}g\,2(R-r) + \frac{1}{2}\cancel{m}\,\overset{v_C}{v_{cm\,min}}{}^2$$

$$\cancel{g}h \overset{②}{=} \cancel{g}\,2(R-r) + \frac{1}{2}\cancel{g}(R-r)$$

$$\boxed{h = \frac{5}{2}(R-r)}$$

(57) Resolver el problema 16 usando consideraciones energéticas.
Al descender el cuerpo de masa m_1, hace girar la polea cilíndrica y desplaza hacia la izquierda el cuerpo de masa m_2.
El coeficiente de roce cinético entre este último cuerpo y el plano horizontal es 0,1.
Aceptando que las cuerdas son inextensibles, de masas y espesores despreciables, calcular la altura que descendió el cuerpo 1 hasta quedar detenido a partir de la posición para la cual la polea tenía una velocidad angular de 3/seg.



$m_1 = 1\,kg$
$m_2 = 20\,kg$
$m_3 = 2m_4 = 60\,kg$
$m_4 = 30\,kg$
$R_3 = 0{,}4\,m$
$R_4 = 0{,}2\,m$

$\omega_0 = 3/seg$
$\omega_f = 0 \rightarrow$ se detuvo

$$v_{10} = \omega_0 \cdot R_4 = \frac{3}{seg} \cdot 0{,}2\,m = \boxed{0{,}6\,m/seg = v_{10}}$$

$$v_{20} = \omega_0 R_3 = \frac{3}{seg} \cdot 0{,}4\,m = \boxed{1{,}2\,m/seg = v_{20}}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = \gamma R_4 \\ d = \gamma R_3 \end{array}\right\} \frac{h}{d} = \frac{\cancel{\gamma} R_4}{\cancel{\gamma} R_3} \Rightarrow d = \frac{h R_3}{R_4}$$

$$\boxed{d = 2h}$$

$$\Sigma W_{FNC} = \Delta Em$$

$$W_{Froz} = \overset{0J}{\overline{Emf}} - Emi$$

$$-F_{rc} \cdot d = -Ep_{g}i - Eci$$

$$\mu_c m_2 g d = m_1 g h + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_0^2 + \frac{1}{2} I_4 \omega_0^2$$

$$\mu_c m_2 g 2h = m_1 g h + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{4}\left(\overset{60}{m_3} \underset{0{,}4}{R_3^2} + \overset{30}{m_4} \underset{0{,}2}{R_4^2}\right) \omega_0^2$$

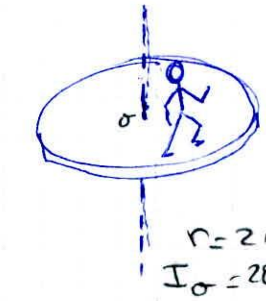
$$0{,}1 \cdot 20\,kg\, 10\frac{m}{seg^2}\, 2\,h = 1\,kg\, 10\frac{m}{seg^2} h + \frac{1\,kg}{2}\left(0{,}6\frac{m}{seg}\right)^2 + \frac{20}{2} kg \left(1{,}2\frac{m}{seg}\right)^2 + \frac{1}{4}\, 10{,}8\,kg\,m^2 \cdot \frac{3^2}{seg^2}$$

$$\underbrace{(40N - 10N)}_{30N} h = 0{,}18\,J + 14{,}4\,J + 24{,}3\,J$$

$$h = \frac{38{,}88\,J}{30\,N} = 1{,}296\,m$$

$$\boxed{h = 1{,}296\,m}$$

58) Se monta una plataforma circular sobre un eje vertical sin rozamiento. Su radio es 2 m y su momento de inercia respecto del eje 280 $kg m^2$.
Inicialmente está en reposo. Un hombre de 70 kg que está de pie en el borde de la plataforma empieza a pasear a lo largo del borde a una velocidad de 1 m/seg respecto al suelo.



$r = 2m$

$I_o = 280 \, kgm^2$ disco

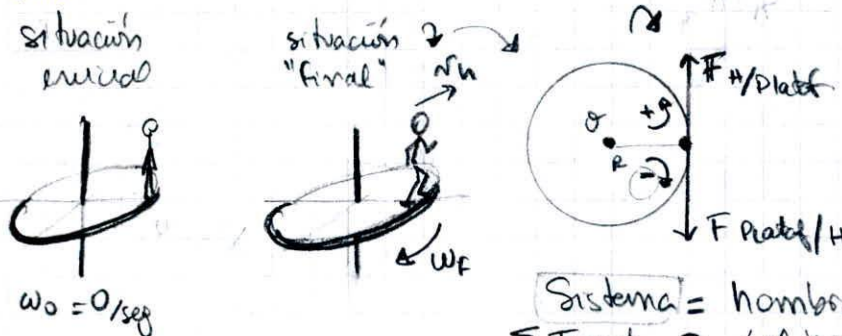
disco: $v_0 = 0$

$\omega_0 = 0$

hombre: $m_H = 70 kg$

$v_{H/T} = 1 m/seg$

a) ¿cuál es la velocidad angular de la plataforma?



Sistema = hombre + plataforma

$\Sigma F_{ext} = 0$ (el hombre es parte del sistema)

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \Sigma \vec{M}_o = 0 \rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

el hombre va hacia un lado → el disco gira para el otro lado

$$(\text{sin mov.}) \rightarrow 0 = \vec{L}_H - \vec{L}_{PLATAF}$$

$$\vec{L}_H = \vec{L}_{PLATAF}$$

$$m_H \cdot R \cdot v_{H/T} = I_{o\,disco} \, \omega F$$

$$70kg \cdot 2m \cdot 1 m/seg = 280 \, kgm^2 \, \omega f \rightarrow \boxed{\omega_F = 0{,}5/seg}$$

b) Cuando el hombre haya recorrido una vuelta alrededor de la plataforma ¿cuál será su desplazamiento angular respecto del suelo?

$$v_{H/T} = v_{H/Plat} + v_{Plat/T}$$

$$1 m/seg = v_{H/Plat} + (-1 m/seg)$$

$$\boxed{v_{H/Plat} = 2 m/seg}$$

$v_{Plat/T} = \omega_F \cdot R = \frac{0{,}5}{seg} \cdot 2m$

$v_{plat/T} = 1 m/seg$

(en sentido contrario que la vel. del hombre/tierra)

El hombre recorrió una vuelta → recorrió el perímetro: perím = $\pi \cdot D$

recorrió: $\boxed{\text{perím} = 4\pi m}$

Recorrido = $v_{H/Plat} \times t$

$$4\pi m = 2 m/seg \cdot t_f \rightarrow \boxed{t_f = 2\pi \, seg} \cong 6{,}28 \, seg$$

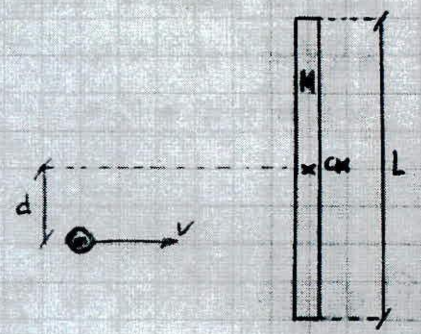
despl. angular

$$\theta = \omega t = \frac{0{,}5}{seg} \cdot 2\pi \, seg = \boxed{\pi = \theta}$$

Guía TPs – Ejercicio 59

Una varilla homogénea ($I^{CM} = \frac{1}{12} ML^2$) descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Tiene masa **M** y puede moverse libremente de cualquier manera sobre la mesa.

Un pequeño disco de masa **m** se mueve según indica la figura con velocidad **v** y choca en forma perfectamente elástica contra la regla.



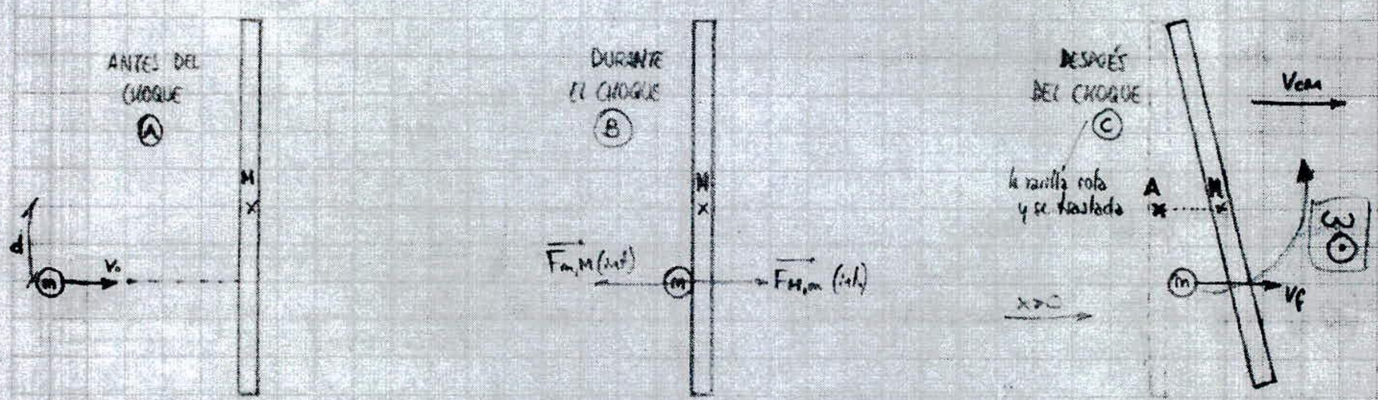
a. ¿Qué magnitudes se conservan en el choque?

b. ¿Cuál debe ser el valor de la masa **m** del disco para que quede en reposo inmediatamente después del choque?

c. Resuelva el punto anterior para $M = 1kg$, $L = 1m$; $d = 0{,}2m$ y $v = 20 m/s$.

d. Con los datos de **c**, calcule cuál será la velocidad del centro de masa de la regla, su velocidad angular y la velocidad de la masa incidente después del choque para el caso en que $m = 1kg$.

ⓐ $Ec_{sistema}$ (porque como es un choque elástico $\Delta Ec = 0$).
$EM_{sistema}$ (porque $\Delta Ec = 0$ y además $EPG_0 = EPG_f = 0$).
$\vec{P}_{sistema}$ (porque no hay fuerzas externas – no hay ni $\vec{F}_R$ ni $\vec{F}_V$ – $\Rightarrow \Sigma \vec{J}_{Fext} = 0$).
$\vec{L}^{o}_{sistema}$ (porque como $\Sigma \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{Fext} = 0 \Rightarrow \Sigma M_{Fext\ sistema} = 0$).



$$\Delta Ec_{AC} = 0$$

$$Ec_{A\,sistema} = Ec_{C\,sistema}$$

$$Ec_{A\,disco} = Ec_{C\,disco} + Ec_{C\,varilla}$$

$$Ec_{C\,varilla} = Ec_{C\,rotación} + Ec_{C\,traslación}$$
$$= \frac{1}{2} I^{bar} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{12} ML^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$
$$= \frac{1}{24} ML^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{24} ML^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

$$m \cdot v_o^2 = m\, v_f^2 + \frac{1}{12} ML^2 \omega^2 + M V_{cm}^2 \quad (1)$$

b) $\underline{v_f = 0}$. (I)* $m \cdot v_0^2 = \frac{ML^2}{12}\omega^2 + M \cdot v_{CM}^2$

(II)* $m\, v_0 = M \cdot v_{CM} \longrightarrow v_{CM} = \frac{m \cdot v_0}{M}$

(III)* $d m\, v_0 = \frac{ML^2}{12}\,\omega \longrightarrow \omega = \frac{12 d m v_0}{ML^2}$

$$m \cdot v_0^2 = \frac{ML^2}{12}\left(\frac{12 d m v_0}{ML^2}\right)^2 + M\left(\frac{m \cdot v_0}{M}\right)^2$$

$$m \cdot v_0^2 = \frac{\cancel{M}\cancel{L^2}\cancel{12}\cdot 12 \cdot d^2 m^2 \cdot v_0^2}{\cancel{12}\cdot \cancel{M}\cdot M \cdot \cancel{L^2}\, L^2} + \frac{\cancel{M}\cdot m^2 v_0^2}{\cancel{M}\cdot M}$$

$$m \cdot v_0^2 = \frac{12\, d^2 m^2 v_0^2}{M \cdot L^2} + \frac{m^2 v_0^2}{M}\left(\frac{L^2}{L^2}\right)$$

$$m \cdot v_0^2 = \frac{12 d^2 m^2 v_0^2 + m^2 v_0^2 L^2}{ML^2}$$

$$m \cdot v_0^2 = (m \cdot v_0^2) \cdot \frac{12 d^2 m + m L^2}{ML^2}$$

$$1 = m \cdot \frac{12 d^2 + L^2}{ML^2}$$

$$\boxed{m = \frac{ML^2}{12 d^2 + L^2}}$$

c) $m = \frac{1kg \cdot (1m)^2}{12(0{,}2m)^2 + (1m)^2} \Rightarrow \boxed{m = 0{,}\overline{675}\ kg}$

d) De (I), (II) y (III), como $m = M = 1kg$, entonces:

(I)** $v_0^2 = v_f^2 + \frac{L^2}{12}\cdot\omega^2 + v_{cm}^2$

(II)** $v_0 = v_f + v_{cm} \longrightarrow v_{cm} = v_0 - v_f$

(III)** $d \cdot v_0 = d \cdot v_f + \frac{L^2}{12}\cdot\omega \longrightarrow \omega = \frac{12 d \cdot (v_0 - v_f)}{L^2}$

$\omega = \frac{12 d}{L^2}\cdot v_{cm}$

Redefinimos (I)** con los valores dados:

$$\left(20\tfrac{m}{s}\right)^2 = v_f^2 + \frac{(1m)^2}{12}\cdot\left[\frac{12 d}{L^2}(v_0 - v_f)\right]^2 + \left[v_0 - v_f\right]^2$$

$$400\tfrac{m^2}{s^2} = v_f^2 + \frac{1m^2}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{12}\cdot 12 \cdot d^2 (v_0 - v_f)^2}{L^2 \cdot L^2} + \left(20\tfrac{m}{s} - v_f\right)^2$$

$$400\tfrac{m^2}{s^2} = v_f^2 + \frac{\cancel{1m^2}\cdot 12(0{,}2m)^2\cdot(20\tfrac{m}{s} - v_f)^2}{\cancel{(1m)^2}\cdot(1m)^2} + \left(20\tfrac{m}{s} - v_f\right)^2$$

$$400\tfrac{m^2}{s^2} = v_f^2 + \frac{0{,}48\cancel{m^2}\cdot(20\tfrac{m}{s} - v_f)^2}{1\cancel{m^2}} + \left(20\tfrac{m}{s} - v_f\right)^2$$

$$400\tfrac{m^2}{s^2} = v_f^2 + 0{,}48\left(20\tfrac{m}{s} - v_f\right)^2 + \left(20\tfrac{m}{s} - v_f\right)^2$$

$$400\tfrac{m^2}{s^2} = v_f^2 + 1{,}48\left(20\tfrac{m}{s} - v_f\right)^2$$

$$400\tfrac{m^2}{s^2} = v_f^2 + 1{,}48\left(400\tfrac{m^2}{s^2} - 40\tfrac{m}{s}\cdot v_f + v_f^2\right)$$

$$400\tfrac{m^2}{s^2} = v_f^2 + 592\tfrac{m^2}{s^2} - 59{,}2\tfrac{m}{s}\cdot v_f + 1{,}48 v_f^2$$

$$0 = 2{,}48\cdot v_f^2 - 59{,}2\tfrac{m}{s}\cdot v_f + 192\tfrac{m^2}{s^2}$$

~~$v_f = 20\frac{m}{s}$~~ ¡ Si $v_f = 20\frac{m}{s} = v_0 \Rightarrow v_{CM} = 0$...

PERO $v_{CM} \neq 0$ (porque la varilla se traslada).

Entonces $v_f = 20\frac{m}{s}$ NO ES SOLUCIÓN

$\boxed{v_f = 3{,}871\ \frac{m}{s}}$ $\left(\frac{120}{31}\right)$

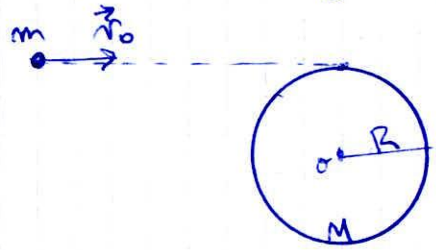
Con el valor de v_f se despeja v_{CM}:

$v_{CM} = v_0 - v_f = 20\frac{m}{s} - 3{,}871\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{v_{CM} = 16{,}129\ \frac{m}{s}}$ $\left(\frac{500}{31}\right)$

Y con v_{CM}, despejamos ω:

$\omega = \frac{12 \cdot 0{,}2m \cdot 16{,}129\frac{m}{s}}{(1m)^2} \Rightarrow \boxed{\omega = 38{,}709\ \frac{m}{s}}$ $\left(\frac{1200}{31}\right)$

(60) Una pequeña partícula de masa m que posee una velocidad v_0, choca contra el borde del disco de masa M y radio R de la figura que puede girar libremente alrededor de un eje fijo que pasa por su centro y queda unido a ella.

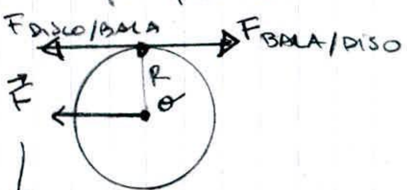


a) Demostrar que después de la colisión el disco queda girando en torno del eje con velocidad angular:

$$\omega = \frac{m \cdot v_0}{R\left(\frac{1}{2}M + m\right)}$$

donde v_0 es la velocidad original de la partícula

Choque plástico.



es externa pero $r=0 \rightarrow M_{F\,ext} = 0$

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_F$$

$$\underbrace{\vec{L}_{DISCO}}_{0\,(\text{quieto})} + \vec{L}_{BALA} = (I_{sistema})\,\omega_f$$

$$\vec{r} \times \vec{p}_0 = (I_{DISCO} + I_{BALA})\,\omega_f$$

$$\cancel{R} \cdot \overbrace{m v_0}^{p_0} = \left(\frac{1}{2} M R^{\cancel{2}} + m R^{\cancel{2}}\right) \omega_f$$

$$m v_0 = R\left(\frac{M}{2} + m\right)\omega_f$$

$$\rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{m \cdot v_0}{R\left(\frac{M}{2} + m\right)}}$$

b) Si $R = 20\,cm$, $M = 1{,}4\,kg$, $m = 100\,gr.$ y $v_0 = 40\,m/seg$, calcular la pérdida de energía a causa del choque.

por lo hallado en a): $\omega_f = \dfrac{0{,}1\,kg \cdot 40\,m/seg}{0{,}2\,m\left(\frac{1{,}4\,kg}{2} + 0{,}1\,kg\right)} = \boxed{\dfrac{25}{seg} = \omega_f} \Rightarrow v_F = \overset{R}{0{,}2\,m}\ \overset{\omega}{\dfrac{25}{seg}}$

$\boxed{v_f = 5\,m/seg}$

$\Delta E_p = 0$

- $E_{m_0} = E_{c_0} = E_{c\,BALA_0} + \underbrace{E_{c\,rot.}}_{0\ (\text{en reposo})} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}1\,kg\ 40^2\,m^2/seg^2 = \boxed{80\,J = E_{m_0}}$

- $E_{mf} = E_{c_f} = E_{c\,BALA\,f} + E_{c\,ROT.\,disco} = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I_o\,\omega_f^2 =$

$= \frac{1}{2}\, 0{,}1\,kg\ 5^2\,m^2/seg^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2} M R^2\right)}_{0{,}028} \frac{25^2}{seg^2} = 1{,}25\,J + 8{,}75\,J = \boxed{10\,J = E_{m_f}}$

$\Delta E_m = E_{mf} - E_{m0} = 10\,J - 80\,J = \boxed{-70\,J = \Delta E_m}$ ✓

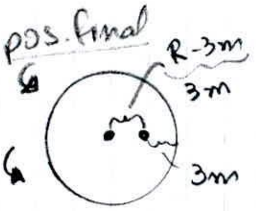
61) Una plataforma en forma de un disco sólido uniforme de radio 6 m y masa 200 kg gira alrededor de su eje de simetría vertical. Un hombre de 100 kg está parado en el borde exterior y moviéndose a una velocidad tangencial de módulo 0,2 m/seg. Despreciando el rozamiento sobre el eje

a) ¿con qué velocidad angular girará el disco si el hombre camina 3 m hacia el centro del disco a lo largo de un radio?

D = disco

situación inicial

pos. final



$R = 6\,m$

$m_D = 200\,kg$

$m_H = 100\,kg$

$\vec{v}_H = 0{,}2\,m/seg$

$v_{tH_0} = \omega R$

$\omega_0 = \dfrac{v_{H0}}{R} = \dfrac{0{,}2\,m/seg}{6\,m}$

$\boxed{\omega_0 = 0{,}0\overline{3}\,/seg}$

La fuerza externa existente es la del vínculo (eje) pero $r = 0 \rightarrow \Sigma M_{F\,ext} = 0\,J$

$$\underbrace{\Sigma M_{F\,EXT} = 0\,J}_{\vec{L}_0 = \vec{L}_F}$$

- $\vec{L}_0 = \underset{\text{partícula}}{\vec{L}_{H0}} + \underset{\text{cilindro}}{\vec{L}_{D0}} =$

$= R\, m_H \cdot v_{H0} + \dfrac{m_D \cdot R^2}{2} \cdot \omega_0 =$

$= 6\,m\; 100\,kg\; 0{,}2\,\dfrac{m}{seg} + \dfrac{200\,kg\; 6^2\,m^2 \cdot 0{,}0\overline{3}}{2}\,\dfrac{1}{seg} =$

$= \boxed{240\,\dfrac{kg\,m^2}{seg} = \vec{L}_0}$

- $\vec{L}_F = \vec{L}_{HF} + \vec{L}_{DF} =$

$= \overbrace{(R-3m)}^{3m}\, m_H \cdot v_{F_H} + \dfrac{m_D R^2}{2}\,\omega_f =$

$= (R-3m)\, 100\,kg\; \omega_f (R-3) + \dfrac{200\,kg\; 6^2\,m^2}{2}\,\omega_f =$

$= \boxed{\omega_f\,(900\,kg\,m^2 + 3600\,kg\,m^2) = \vec{L}_F}$

$\rightarrow \vec{L}_0 = \vec{L}_F \rightarrow 240\,\dfrac{kg\,m^2}{seg} = \omega_f\; 4500\,kg\,m^2 \longrightarrow \boxed{\omega_f = 0{,}05\overline{3}\,/seg}$

b) Hallar el trabajo que realizó la persona sobre el disco y la variación de energía cinética del sistema hombre-disco

trabajo que realiza el hombre sobre la plataforma: $W_{H\,en\,plat} = \Delta E_{c\,H}$

$\rightarrow W_{H\,en\,plat} = \Delta E_{m\,H} = \Delta E_{c\,H} = E_{c\,Hf} - E_{c\,Hi} = \dfrac{1}{2} m_H (v_f^2 - v_i^2) =$

$= \dfrac{1}{2}\, 100\,kg\, \Big(\underbrace{\omega_f^2 \cdot (R-3m)^2}_{v_f^2 = 0{,}026\,m^2/seg^2} - 0{,}2^2\,m^2/seg^2\Big) = \boxed{-0{,}72\,J = W_{H\,en\,plat}}$

- $\Delta E_{c\,sistema} = E_{cf} - E_{ci}$

$\cdot\, E_{cf} = E_{c\,rot\,disco} + E_{c\,H} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} m_D R^2\right)\omega_f^2 + \dfrac{m_H v_f^2}{2} = \dfrac{200\,kg\; 6^2\,m^2\; 0{,}05\overline{3}^2}{4} + \dfrac{100\,kg\; 0{,}026\,m^2/seg}{2}$

$\boxed{E_{cf} = 6{,}42\,J}$

$\cdot\, E_{ci} = E_{c\,rot\,d} + E_{c\,H} = \dfrac{m_D R^2}{4}\,\omega_0^2 + \dfrac{m_H \times 0{,}2^2\,m^2/seg^2}{2} = 2\,J + 2\,J = \boxed{4\,J = E_{ci}}$

$\boxed{\Delta E_{c\,sistema} = 2{,}42\,J}$